

ANNALEN
DER
PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON RICHARD FISCHER, 1. UND 2. VORSTAND.

VIERTER FOLIO.

BAND 12. HEFT 1.

BEI DER VERLAGS-ANSTALT VON J. NEUBAUER.

VERLAGS-ANSTALT.

F. HOFMEIER, M. PLANCH, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, R. WERNER.

MITTELSCHNITTEN.

DIE NEUBAUER'SCHE PHYSIKALISCHES OBSERVATORIUM.

UND VERLAGS-ANSTALT VON

M. PLANCH.

VERLAGS-ANSTALT VON J. NEUBAUER.

PAUL DRUDE.



LEIPZIG, 1900.

VERLAG VON JOHANN AMBROS BARTH.

CONTENTS II.

Verlag von J. Neumann, Neudamm, Berlin, 1900.
Verlag von J. Neumann, Neudamm, Berlin, 1900.
10. Band, 1. Heft, 1. Lieferung, 1900.

Inhalt.

1. J. Stärk, T. Retschinsky und A. Schapashnikoff. Untersuchungen über den Lichtbogen . . .	339
2. Balthasar Hartmann. Untersuchung über die Leistungsfähigkeit der Asemannschen Methode zur experimentellen Bestimmung des Verhältnisses $c_p/c_v = \kappa$ der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und konstantem Volumen von Gasen . . .	349
3. A. Denizot. Zur Theorie der relativen Bewegung und des Foucaultschen Pendelversuches . . .	359
4. Peter Nell. Studien über Diffusionsvorgänge wässriger Lösungen in Gelatine . . .	365
5. J. B. Sachs. Untersuchungen über den Einfluß der Erde bei der drahtlosen Telegraphie . . .	365
6. E. Aschkinass. Elektrische Leitungsfähigkeit und Reflexionsvermögen der Kohle . . .	373
7. A. L. Holz. Über Flüssigkeitsbewegungen, welche durch Rotation fester Körper verursacht werden . . .	397
8. R. H. Weber. Permeabilitätsmessung an Stählungen . . .	395
9. E. Walter und R. Pohl. Über das Eigenlicht des Natriumbromids . . .	403
10. G. E. Leithäuser. Bemerkung zu der Arbeit des Herrn Becker: „Messungen an Kathodenstrahlen“ . . .	410

Manuskripte sind an den Herausgeber, Professor Dr. P. Bruck, zu senden. Seine Adresse ist Berlin N.W. 7, Neue Wilhelmstr. 16.

Es wird gebeten, die Manuskripte druckfertig einzusenden und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Zeichnungen sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzichnen). Da die Figuren so weit möglich in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Einfache sind am Rande oder unten auf dem Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl anzuführen.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 Sonderabdrücke jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf deren erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffen, den Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 18.

1. Untersuchungen über den Lichtbogen; von J. Stark, T. Retschinsky und A. Schaposchnkoff.

Inhalt: § 1. Theoretische Einleitung. (Elektrisierung an der kathodischen Strombasis; Stoßionisierung im kathodischen Lichtbüschel; Stoßionisierung in der Anodenschicht; Stoßionisierung in der positiven Lichtsäule; Geschwindigkeit der positiven und negativen Ionen; Innere elektromotorische Kräfte an den Elektroden; Iontheorie der Charakteristik des Lichtbogens, Wechselstromlichtbogen.) § 2. Der Spannungsabfall in der Lichtbogensäule in Abhängigkeit von der umgebenden Gasatmosphäre. § 3. Die Methode des Querstromes angewandt auf den Lichtbogen. § 4. Verhältnis der Geschwindigkeiten der positiven und negativen Ionen. § 5. Methode zur Messung des Kathodenfalles. § 6. Kathodenfall und Stromstärke. § 7. Der Anodenfall in der Anodenschicht an kalter Anode. § 8. Der Anodenfall in der Anodenschicht an heißer Anode. § 9. Der Anodenfall im kathodischen Lichtbüschel an kalter Anode. § 10. Resultate.

§ 1. *Theoretische Einleitung.* — Über den Lichtbogen wurden in letzter Zeit zahlreiche experimentelle Untersuchungen angestellt, so von P. C. Hewitt¹⁾, E. Weintraub²⁾, W. B. von Czudnochowski³⁾, J. Stark⁴⁾, J. Stark und L. Cassuto⁵⁾, G. Granqvist⁶⁾, L. Cassuto⁷⁾, A. P. Wills⁸⁾, C. D. Child⁹⁾, E. Martiny¹⁰⁾, S. Maisel¹¹⁾, W. S. Weedon¹²⁾, W. Mitke-

1) P. C. Hewitt, El. 52. p. 447. 1904.

2) E. Weintraub, Phil. Mag. 7. p. 95. 1904.

3) W. B. von Czudnochowski, Physik. Zeitschr. 5. p. 99. 1904.

4) J. Stark, Ann. d. Phys. 12. p. 673. 1903; Physik. Zeitschr. 5. p. 81 u. p. 750. 1904.

5) J. Stark u. L. Cassuto, Physik. Zeitschr. 5. p. 264. 1904.

6) G. Granqvist, Boltzmann-Festschrift p. 799. 1904.

7) L. Cassuto, Physik. Zeitschr. 5. p. 263. 1904.

8) A. P. Wills, Phys. Rev. 19. p. 65. 1904.

9) C. D. Child, Phys. Rev. 19. p. 117. 1904; 20. p. 100. 1905.

10) E. Martiny, Verh. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 6. p. 199. 1904.

11) S. Maisel, Physik. Zeitschr. 5. p. 550. 1904.

12) W. S. Weedon, Trans. Am. Electroch. Soc. 5. p. 171. 1904.

witch¹⁾, W. Duddell²⁾, C. W. Waidner u. G. R. Burgess³⁾, M. v. Recklinghausen⁴⁾, J. Pollak⁵⁾, L. Lombardi und G. Melazzo⁶⁾, E. Rasch⁷⁾, H. Th. Simon⁸⁾, J. Stark und R. Küch.⁹⁾

Soweit in diesen Untersuchungen das Streben nach einer theoretischen Auffassung der beobachteten Erscheinungen hervortritt, ist es überall die Ionenhypothese, welche zur Grundlage einer Theorie des Lichtbogens gemacht wird. Der eine von uns (Stark) hat in den Hauptzügen nachstehende Theorie von dem Mechanismus des Lichtbogens entwickelt. Da die hier mitgeteilten experimentellen Untersuchungen nach bestimmten theoretischen Gesichtspunkten¹⁰⁾ durchgeführt wurden, so seien diese hier im Zusammenhang noch einmal mitgeteilt.

Der Lichtbogen ist eine selbständige Strömung, als solche erzeugt er seine positiven und negativen Ionen in der Strombahn andauernd selbst. Um die Ionen, welche durch Elektrolyse oder Wiedervereinigung verschwinden, durch neue zu ersetzen, benützt er die vorhandenen Ionen; diesen erteilt er die zu ihrer Arbeitsleistung notwendige kinetische Energie, indem er sie in seiner Bahn genügend große Spannungsdifferenzen durchlaufen läßt.

Elektrisierung an der kathodischen Strombasis. — An der Kathode erzeugt der Lichtbogen seine negativen Ionen durch Elektrisierung.¹¹⁾ Durch die positiven Ionen, welche auf die kathodische Strombasis treffen, erhitzt er diese auf eine so

1) W. Mitkewitch, Journ. russ. phys.-chem. Gesellsch. 35. p. 507 u. 675. 1903; 36. p. 13 u. 259. 1904.

2) W. Duddell, Phil. Trans. 203. p. 305. 1904.

3) C. W. Waidner u. G. R. Burgess, Phys. Rev. 19. p. 241. 1904.

4) M. v. Recklinghausen, Elektrot. Zeitschr. 25. p. 1102. 1904.

5) J. Pollak, Physik. Zeitschr. 6. p. 277. 1905.

6) L. Lombardi u. G. Melazzo, Atti Ass. Elettrot. Ital. 9. p. 1. 1905.

7) E. Rasch, Physik. Zeitschr. 5. p. 375. 1904.

8) H. Th. Simon, Physik. Zeitschr. 6. p. 297. 1905.

9) J. Stark u. R. Küch, Physik. Zeitschr. 6. p. 438. 1905.

10) J. Stark, Ann. d. Phys. 12. p. 673. 1903; Le mécanisme de l'arc électrique, Mém. du volume „Les électrons“. Gauthier-Villars, Paris 1905.

11) J. Stark, Die Elektrizität in Gasen. Leipzig 1902. p. 99; Ann. d. Phys. 12. p. 687. 1903.

hohe Temperatur, daß sie negative Elektronionen in großer Zahl ausstrahlt. Dies ist der charakteristische Vorgang, durch welchen sich der Lichtbogen von dem Glimmstrom, einer anderen selbständigen Strömung, unterscheidet. In der Tat haben alle dahinzielenden experimentellen Untersuchungen festgestellt, daß die kathodische Strombasis des Lichtbogens in allen Fällen auf Weißglut erhitzt ist, und daß der Lichtbogen nicht existieren kann, wenn das Auftreten der hohen Temperatur in seiner kathodischen Strombasis verhindert wird.¹⁾ Von diesem Gesichtspunkt gehen auch W. Mitkewitch und H. Th. Simon aus in ihrer Theorie des Lichtbogens.

Stoßionisierung im kathodischen Lichtbüschel. — Damit die positiven Ionen dauernd zur kathodischen Basis strömen und aus ihr durch Erhitzung negative Ionen frei machen können, müssen sie ihrerseits dauernd neu erzeugt werden in dem Raum zwischen Kathode und Anode. Dies geschieht nicht dadurch, daß die negativen Ionen ihrerseits die Anode hoch temperieren, so daß aus dieser die positiven Ionen kommen können.²⁾ Denn der Lichtbogen ist bei kalter Anode möglich. Die positiven Ionen werden vielmehr innerhalb des Gas- oder Dampftraumes durch den Stoß der von der Kathode kommenden negativen Elektronionen erzeugt. Zu dieser Stoßionisierung benötigen die negativen Ionen ein Minimum kinetischer Energie, diese erlangen sie, indem sie auf ihrer freien Weglänge ein Minimum von Spannungsdifferenz frei durchlaufen. Der Spannungsabfall längs der Strombahn des Lichtbogens muß sich darum entsprechend der chemischen Art und der Dichte des Dampfes (Gases) so einstellen, daß er nicht unter ein gewisses Minimum sinkt. Andererseits kann er aber auch bei Konstanz jener zwei Faktoren nicht über dieses Minimum steigen; denn erfolgt einmal die Stoßionisierung, so hat Vermehrung der Stromstärke nur Vermehrung der Zahl der Ionen und darum keine Erhöhung des Spannungsabfalles zur Folge.

Der Lichtbogen besitzt drei Partien, in denen Ionisierung durch den Stoß negativer Ionen statthat. Die wichtigste davon

1) J. Stark u. L. Cassuto, Physik. Zeitschr. 5. p. 264. 1904.

2) Vgl. C. D. Child, Int. electrical congress of St. Louis, 1904, section A.

ist das kathodische Lichtbüschel.¹⁾ Unmittelbar vor der Kathode werden in diesem die nach der Kathode abströmenden positiven Ionen erzeugt durch den Stoß der direkt aus der kathodischen Strombasis kommenden negativen Ionen. Von der Kathode weg bis in das Innere des Lichtbüschels müssen darum die negativen Ionen einen Spannungsabfall frei durchlaufen, welcher gleich ist ihrer Ionisierungsspannung für den betreffenden aus der hoch temperierten Kathode kommenden Metaldampf. Der Kathodenfall des Lichtbogens, jener Spannungsabfall, stellt also die Energie dar, welche im Minimum von einem negativen Elektronion (Kathodenstrahl) als Arbeit zur Ionisierung eines neutralen Atoms des Kathodenmetalles (Abtrennung eines negativen Elektrons) aufgewendet werden muß. Der Kathodenfall des Lichtbogens gewinnt demnach die Bedeutung einer physikalisch-chemischen Konstante des einzelnen chemischen Atoms. Als eine Ionisierungsspannung²⁾ muß er in weiten Grenzen unabhängig sein von der mittleren Temperatur, dem Dampfdruck und der Stromstärke. Erhöhung der Stromstärke kann an der Kathode des Lichtbogens lediglich Vergrößerung der Strombasis bedeuten.

Stoßionisierung in der Anodenschicht. — Da in der Basis des kathodischen Lichtbüschels die negativen Ionen durch Elektrisierung in die Strombahn geschafft, in dem Lichtbüschel selbst die positiven Ionen durch Stoßionisierung erzeugt werden, so vermag dank diesem Wechselspiel von positiven und negativen Ionen die elektrische Strömung bereits selbständig zu bestehen, wenn die Anode so nahe der Kathode ist, daß sie in das Lichtbüschel taucht. Der Lichtbogen besteht in diesem Falle lediglich aus dem kathodischen Lichtbüschel, besitzt keine positive Lichtsäule und keine Anodenschicht. Wird indessen die Anode nicht von dem kathodischen Lichtbüschel bespült, so muß sich zwischen diesem und ihr noch eine andere Strompartie mit Stoßionisierung ausbilden. An der Anode selbst

1) J. Stark, Le mécanisme de l'arc électrique, Mém. du vol. „Les électrons“. Gauthier-Villars, Paris 1905. Die hier gegebene theoretische Auffassung des Kathodenfalles hat an die Stelle der früheren Ansicht (Ann. d. Phys. 12. p. 688. 1903) zu treten.

2) J. Stark, Ann. d. Phys. 7. p. 420. 1902; Physik. Zeitschr. 5. p. 56. 1903.

entsteht dann die Anodenschicht mit Stoßionisierung durch die negativen Ionen. Infolge der Wiedervereinigung und infolge des Wegwanderns der positiven Ionen steigt unmittelbar an der Anode der Spannungsabfall. Er kann indes mit der Stromstärke rasch nur so weit steigen, bis er gleich der Ionisierungsspannung der negativen Ionen geworden ist; denn dann tritt unmittelbar an der Oberfläche der Anode Stoßionisierung des Metaldampfes durch die negativen Ionen ein. In diesem Falle stellt demnach der Anodenfall in der Anodenschicht die Ionisierungsspannung der negativen Elektronionen dar für das betreffende Anodenmetall.¹⁾ Dies gilt indes nur, wenn die Anode nicht ganz von der Strömung bedeckt ist. Ist sie ganz bedeckt, kann also die anodische Strombasis bei steigender Stromstärke nicht mehr weiter wachsen, so nimmt der Anodenfall mit dieser zu. Vorausgesetzt ist dabei ferner, daß an der Anode nicht infolge hoher Temperatur eine innere elektromotorische Kraft auftritt, wie weiter unten dargelegt ist. Der Anodenfall in dem kathodischen Lichtbüschel ist natürlich kleiner als derjenige in der Anodenschicht; denn in jenem wird der Dampf unmittelbar an der Anode durch die negativen Ionen ionisiert, welche bereits von der Kathode weg ihre Ionisierungsspannung durchlaufen haben.

Stoßionisierung in der positiven Lichtsäule. — Ist der Abstand zwischen Anode und Kathode so groß, daß er nicht von dem kathodischen Lichtbüschel und der Anodenschicht ausgefüllt wird, so liegt zwischen diesen beiden Schichten noch eine dritte Strompartie, in welcher Ionisierung durch den Stoß negativer Elektronionen statthat, die positive Lichtsäule. Ist diese geschichtet, so stellt der Spannungsabfall, welcher auf der einzelnen Schicht liegt, im Minimum wieder die Ionisierungsspannung der negativen Ionen dar. Zumeist ist aber die positive Säule im Lichtbogen ungeschichtet; die negativen Ionen bewegen sich also in dem einzelnen Querschnitt nicht in gleicher Phase in bezug auf die frei durchlaufene Spannungsdifferenz, sondern in allen möglichen Phasen. In diesem Falle läßt sich darum ihre Ionisierungsspannung nicht ermitteln, da

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 7. p. 436. 1902; Die Elektrizität in Gasen. Leipzig 1902. p. 167.

ihre freie Weglänge unbekannt ist. Indes stellt sich der Spannungsabfall auch in diesem Falle nach Maßgabe der Art und der Dichte des Dampfes auf einen festen Wert ein, den er nur bei Variation dieser beiden Faktoren verläßt. Bei konstanter chemischer Natur des Dampfes oder Gasgemisches nimmt in der positiven Säule des Lichtbogens der Spannungsabfall ab, wenn die Dichte des Dampfes kleiner wird, sei es infolge von Druckerniedrigung oder Temperaturerhöhung. Dieser Satz hat sich in allen Fällen bestätigt, in denen der Lichtbogen in einem evakuierten Gefäß ausschließlich in dem Dampf seines Elektrodenmetalles brannte. Die chemische Natur des Gases in der Strombahn kann dann geändert werden, wenn dieses ein Gemisch aus dem Dampf des Elektrodenmetalles und einem fremden Gas darstellt, wenn beispielsweise der Lichtbogen nicht in einem evakuierten Gefäß, sondern in einer Gasatmosphäre wie Luft oder Wasserstoff brennt. Je geringer in diesem Falle der relative Betrag des Dampfes in der Strombahn, je geringer also die Verdampfung der Elektroden ist, desto größer ist der Spannungsabfall in der positiven Säule des Lichtbogens. Die Verdampfung der Elektroden ist bei konstantem Abstand derselben beispielsweise um so kleiner, je kleiner die Leistung im Lichtbogen ist, also je kleiner bei konstanter Stromstärke der Gasdruck oder je kleiner bei konstantem Gasdruck die Stromstärke¹⁾ ist. Ferner ist sie um so kleiner, je mehr die Strombahn und die Elektroden durch das umgebende Gas abgekühlt werden; die gleiche Wirkung hat künstliche Abkühlung der Elektroden durch Wasser.²⁾ Unter diesem Gesichtspunkt ist die Abhängigkeit der Elektrodenspannung des Lichtbogens von der Stromstärke zu erklären, wenn der Lichtbogen in einer Gasatmosphäre brennt. Wie man sieht, ist dieser Fall durch unkontrollierbare Versuchsbedingungen so kompliziert, daß er keinesfalls als Grundlage zur Aufstellung oder Prüfung einer Theorie des Lichtbogens dienen kann.

Geschwindigkeit der positiven und negativen Ionen. — Die negativen Ionen, welche im kathodischen Lichtbüschel, in der

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 12. p. 679. 1903; J. Stark u. L. Cassuto, Physik. Zeitschr. 5. p. 268. 1904.

2) J. Stark u. L. Cassuto, Physik. Zeitschr. 5. p. 267. 1904.

positiven Lichtsäule und in der Anodenschicht das Gas durch ihren Stoß ionisieren, sind, wie bis jetzt stillschweigend vorausgesetzt wurde, Elektronionen oder, wie man sich auch ausdrücken kann, Kathodenstrahlen. Diese Ansicht ist schon früher¹⁾ ausgesprochen worden. Die positiven Ionen im Lichtbogen sind überwiegend Atomionen. Hieraus ist zu folgern, daß die negativen Ionen im Innern der Strombahn des Lichtbogens dank ihrer kleinen Masse eine größere spezifische Geschwindigkeit besitzen müssen als die positiven Ionen.

Innere elektromotorische Kräfte an den Elektroden. — Schon früher²⁾ wurde darauf hingewiesen, daß die Ausstrahlung negativer Elektronionen aus der hoch temperierten Elektrodenoberfläche in den Dampfraum als innere elektromotorische Kraft an den Elektrodenoberflächen sich betätigen müsse. In der Tat ist die dampfförmige Strombahn des Lichtbogens als metallischer Leiter zu betrachten, da seine negativen Ionen mit derjenigen eines festen oder flüssigen Metalles identisch sind; die kathodische und anodische Strombasis des Lichtbogens stellen demnach Kontakt- oder Lötstellen zweier metallischer Leiter dar; die in ihnen auftretende innere thermoelektrische Kraft ist abhängig von der absoluten Temperatur der Kontaktstelle und von dem Zustand der zwei metallischen Leiter rechts und links von der Kontaktstelle. Da nun das hoch temperierte Metall der Elektrode mehr negative Elektronionen in den Dampfraum strahlt, als umgekehrt der Fall ist, so tritt in der hoch temperierten kathodischen Strombasis eine innere thermoelektromotorische Kraft auf im gleichen Sinne wie der elektrische Spannungsabfall; in einer hoch temperierten anodischen Strombasis ist diese innere elektromotorische Kraft zu dem Spannungsabfall entgegengesetzt gerichtet. Demgemäß arbeitet die innere elektromotorische Kraft an der Kathode des Lichtbogens unter Verbrauch von Wärme; an der hoch temperierten Anode dagegen arbeitet der Spannungsabfall entgegen der inneren Kraft unter Entwicklung von Wärme.

Da in der kathodischen Strombasis des Lichtbogens notgedrungen immer eine hohe Temperatur herrscht und diese

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 12. p. 680. 1903.

2) J. Stark, Ann. d. Phys. 12. p. 691. 1903; W. Mitkewitch, Journ. russ. phys.-chem. Gesellsch. 36. p. 18. 1904.

infolge der Konstanz des Kathodenfalles bei stationären Verhältnissen konstant ist, so ist die innere thermoelektrische Kraft an der Kathode notwendig immer vorhanden und kann nicht durch Variation der Temperatur variiert werden. Dagegen ist dies möglich an der Anode. Hier kann die Temperatur künstlich variiert werden. Erhöhung ihrer Temperatur auf Rot- oder Weißglut unter Konstanz der Verhältnisse vor ihr im Dampf-raum muß den Anodenfall erhöhen infolge der Entwicklung der inneren elektromotorischen Gegenkraft. Bei konstanter Temperatur der Anode muß aber diese innere Gegenkraft und damit auch der Anodenfall variieren mit dem Zustand des Dampfes vor der Anode; so muß der Anodenfall kleiner werden, wenn die Dichte des Dampfes steigt und sich somit dessen Zustand demjenigen des hoch temperierten Anodenmetalles nähert. Durch die Untersuchungen von W. Duddell (l. c.) ist die Existenz innerer elektromotorischer Kräfte an den Elektroden des Lichtbogens außer jeden Zweifel gesetzt.

Nach den vorhergehenden Ausführungen über die inneren elektromotorischen Kräfte an den Elektroden des Lichtbogens ist eine Einschränkung vorzunehmen an der oben dargelegten Ansicht, daß der Kathodenfall die Arbeit sei, welche die negativen Elektronen zur Ionisierung eines neutralen Metallatoms im kathodischen Lichtbüschel verbrauchen. Es ist nämlich hierbei nicht berücksichtigt, daß die negativen Ionen beim Austritt aus der kathodischen Strombasis und beim Eintritt in das Gebiet des Kathodenfalles schon eine Anfangsgeschwindigkeit v_k besitzen. Ist darum μ die Masse des negativen Ions, e seine Ladung in statischem Maße und K der Kathodenfall in Volt, so beträgt jene Ionisierungsarbeit

$$\frac{1}{2} \mu v_k^2 + \frac{e \cdot K}{300}.$$

Es ist anzunehmen, daß $\frac{1}{2} \mu v_k^2$ klein ist gegen K , solange dies nicht viel kleiner als 5 Volt ist.

Ionentheorie der Charakteristik des Lichtbogens, Wechselstromlichtbogen. — Charakteristik einer Dynamomaschine heißt die Kurve, welche die Beziehung zwischen der Klemmspannung und der Stromstärke graphisch darstellt. Diese Bezeichnung ist auch auf die elektrische Strömung in Gasen übertragen worden. Das Ohmsche Gesetz stellt die Beziehung zwischen

der Stromstärke in einem festen oder flüssigen Leiter und der Spannungsdifferenz an seinen Enden (Elektrodenspannung) in einfacher Weise dar als Funktion der Dimensionen und einer spezifischen Konstante des Leiters. Nun ist bei einem Gas die Charakteristik in der Regel das Resultat einer Kombination von vielen einzelnen, zumeist verschiedenen Vorgängen innerhalb des gasförmigen Leiters. Infolgedessen besitzt in diesem Falle die Elektrodenspannung nicht mehr die einfache Bedeutung wie bei einem metallischen oder flüssigen Leiter; die Charakteristik einer Strömung in Gasen besitzt lediglich technischen Wert zur formalen Diskussion der Beziehung zwischen elektromotorischer Kraft, Stromstärke und Elektrodenspannung auf Grund des Ohmschen Gesetzes für den nicht gasförmigen Teil des Stromkreises. Über die charakteristischen Vorgänge im gasförmigen Leiter selbst vermag natürlich eine solche Diskussion nichts auszusagen.

Eine theoretisch-analytische Darstellung der Charakteristik einer elektrischen Strömung in Gasen kann nur das Resultat einer vorhergehenden Analyse der einzelnen Vorgänge im Gase sein. Es ist möglich gewesen, mit großer Annäherung eine Ionentheorie¹⁾ der Charakteristik der unselbständigen Strömung in einem Gase zu geben. Diese Theorie verknüpft die spezifischen Ionenzahlen n_p bez. n_n , die spezifischen Geschwindigkeiten v_p bez. v_n , die Ionenladung e , den Koeffizienten der Wiedervereinigung α , die elektrische Spannung V , die Stromstärke i und die Raumkoordinaten zu einer Formel; sie macht dabei die Annahme, daß die Geschwindigkeit der Ionen in einem jeden Querschnitt proportional der hier herrschenden elektrischen Kraft sei, ferner setzt sie voraus, daß die Stärke der sekundären Ionisierung räumlich konstant sei.

Eine Ionentheorie der Charakteristik der selbständigen Strömungen hätte die Aufgabe zu lösen, die Elektrodenspannung darzustellen als Funktion der spezifischen Ionenzahlen, der Ionisierungsspannungen und der mittleren freien Weglängen der positiven und negativen Ionen, der Ionenladung, des Koeffizienten der Wiedervereinigung, der elektrischen

1) J. J. Thomson, *Phil. Mag.* 47. p. 257. 1899; E. Riecke, *Ann. d. Phys.* 12. p. 52. 1903; G. Mie, *Ann. d. Phys.* 13. p. 858. 1904; vgl. T. Retschinsky, *Physik. Zeitschr.* 6. p. 472. 1905.

Spannung, der Stromstärke und der Raumkoordinaten. Dabei dürfte sie nicht mehr von der Annahme ausgehen, daß die Geschwindigkeit der Ionen proportional der Kraft sei, sondern müßte berücksichtigen, daß in den einzelnen Schichten der selbständigen Strömung die Ionen unter Beschleunigung Spannungsdifferenzen frei durchlaufen, so daß ihre Geschwindigkeit in einem Querschnitt abhängt von der Spannungsdifferenz, welche vor dem Querschnitt von ihnen frei durchlaufen wurde. Im Falle des Lichtbogens müßte eine Ionentheorie seiner Charakteristik in die Formel für die Elektrodenspannung auch noch aufnehmen die inneren elektromotorischen Kräfte in der anodischen und kathodischen Strombasis als Funktion der Temperatur und spezifischer Konstanten des Metalles und Dampfes. Würde eine solche Ionentheorie für den Lichtbogen in freier Luft entworfen, so müßte sie auf die thermische und chemische Inhomogenität längs der Stromlinien und in senkrechter Richtung zu ihnen Rücksicht nehmen.

Die wissenschaftliche Analyse der selbständigen Strömungen, speziell des Lichtbogens, kann sich nicht die Konstruktion der Charakteristik aus Ionenkonstanten zum ersten Ziele setzen; sie hat vor allem die einzelnen Vorgänge im Lichtbogen isoliert zu betrachten und in den frei durchlaufenen Spannungsdifferenzen wichtige neue Konstanten zu ermitteln.

Wie aus den vorhergehenden Darlegungen folgt, haben wir eine elektrische Strömung in einem Dampf zwischen zwei Elektroden nur so lange als Lichtbogen zu betrachten, als längs der Strombahn der für den Lichtbogen charakteristische und notwendige Spannungsabfall, vor allem sein Kathodenfall und die durch ihn bedingte hohe Temperatur der kathodischen Strombasis vorhanden ist. Wird der Spannungsabfall kleiner, so ist der Lichtbogen als erloschen zu betrachten; die noch vorhandene Strömung ist eine unselbständige Strömung, welche die von der Lichtbogenphase her noch vorhandenen Ionen in Bewegung setzt. Der Wechselstromlichtbogen setzt sich darum zusammen aus einer Phase selbständiger Strömung (Lichtbogen) und aus einer Phase unselbständiger Strömung; die zwei Phasen gehorchen ganz verschiedenen Gesetzen; in den Komplex der Variablen, welche in der Charakteristik der zwei Phasen zueinander in Beziehung treten, tritt als neue Variable die Zeit auf.

§ 2. *Der Spannungsabfall in der Lichtbogensäule in Abhängigkeit von der umgebenden Gasatmosphäre.* — Wie oben theoretisch gefolgert wurde, ist in der positiven Säule des Lichtbogens, der in einer Gasatmosphäre brennt, der Spannungsabfall um so größer, je kleiner die Menge des Metaldampfes in der Säule ist, also beispielsweise je stärker das umgebende Gas die Elektroden abkühlt und je mehr es längs der Säule durch Abkühlung eine partielle Kondensation des Metaldampfes bewirkt. Über die Wirkung verschiedener Gasatmosphären auf den Lichtbogen liegen bereits einige Untersuchungen vor, so von Grove (1840), Herwig¹⁾, Stenger²⁾, Arons³⁾, Crew und Basquin⁴⁾, Guye und Monasch.⁵⁾ Es ist von einigen Autoren die Ansicht ausgesprochen worden, daß ein spezifisch chemischer Einfluß des Gases auf die Elektroden das Zustandekommen des Lichtbogens bedinge.⁶⁾ Nach unserer Ansicht ist der Einfluß der Gasatmosphäre auf den Lichtbogen ein sekundärer und ausschließlich unter dem oben gegebenen Gesichtspunkt zu betrachten. Daß für die Existenz des Lichtbogens eine chemische Wirkung eines Gases an der Oberfläche seiner Elektroden prinzipiell nicht notwendig ist, wird allein durch die Tatsache bewiesen, daß für eine Reihe von Metallen (Hg, Cd, Zn, Pb, Bi, Sb) der Lichtbogen ausschließlich in ihrem Dampfe in gasfreien Quarzröhren zu brennen vermag.⁷⁾

Um den Einfluß der Abkühlung durch die Gasatmosphäre an extremen Fällen zu zeigen, wählten wir als Elektroden Kohle und Kupfer, als Gase Kohlensäure und Wasserstoff von atmosphärischem Druck. Die thermischen Leitungsvermögen von Kupfer und Kohle verhalten sich ungefähr wie 1000:1, diejenigen von Kohlensäure und Wasserstoff wie 10:1.

Der Lichtbogen wurde erzeugt in einer Glaskugel von 11 cm Durchmesser; durch zwei vertikale Ansatzröhren waren in sie die Elektroden eingeführt, über diese und die Ansatz-

1) H. Herwig, Pogg. Ann. 149. p. 523. 1873.

2) F. Stenger, Wied. Ann. 25. p. 31. 1885.

3) L. Arons, Ann. d. Phys. 1. p. 700. 1900.

4) H. Crew u. O. H. Basquin, Proc. Americ. Acad. 33. p. 335. 1897/98.

5) Ch. E. Guye u. B. Monasch, Ecl. El. 34. p. 305. 1903.

6) B. Monasch, Der elektrische Lichtbogen. Berlin 1904. p. 205.

7) J. Stark u. R. Küch, Physik. Zeitschr. 6. p. 438. 1905.

röhren waren Gummischläuche luftdicht geschoben. In horizontaler Stellung waren außerdem noch zwei Röhren mit Hähnen angebracht. Die eine diente zum Einleiten, die andere zum Ableiten des Gases. Kohlensäure wurde aus einer käuflichen Bombe entnommen, Wasserstoff aus Schwefelsäure und Zink entwickelt; beide Gase wurden vor Eintritt in die Kugel durch Phosphorpentoxyd getrocknet. Vor dem Einleiten des Gases wurde die Kugel erst evakuiert, ebenso nach dem Einleiten mehrere Male, um die letzten Luftreste wegzuspülen. Während der Lichtbogen brannte, wurde ein langsamer Gasstrom durch die Kugel geleitet.

Die Kohleelektroden waren lange massive zylindrische Stäbe von 6 mm Durchmesser. Die Kupferelektroden waren 7 mm dicke, 20 mm lange zylindrische Stäbe, die an ihren abgewandten Enden in Kohlenstäben befestigt waren. Als elektromotorische Kraft dienten für die Versuche in Kohlensäure 220 Volt, für die Versuche in Wasserstoff 440 Volt Spannung des städtischen Netzes.

Wir teilen in den Tab. I und II einige unserer Messungsreihen mit; in Fig. 1 sind sie graphisch dargestellt. Zu Tab. II

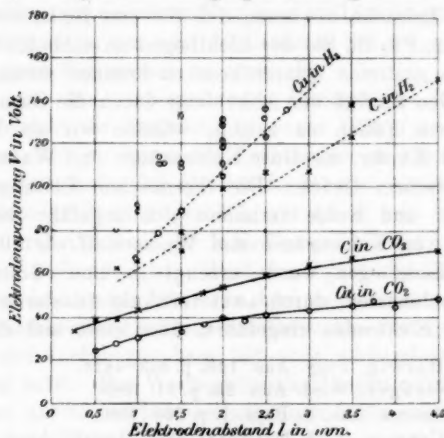


Fig. 1.

sei bemerkt, daß bei den Versuchen in Wasserstoff die Stromstärke nicht überall 3 Amp. betrug, sondern zwischen 3 und

5,5 Amp. variierte infolge der Schwierigkeit konstanter Einstellung.

Tabelle I.

Elektrodenspannung (Volt) des Lichtbogens zwischen Kohleelektroden bei 3 Amp. Stromstärke.

Elektroden- abstand mm	Bogen in CO ₂	Bogen in H ₂
0,25	32	—
0,5	39	—
0,75	39	61,6
1,0	43	66
1,5	47	71—79
1,75	50	—
2,0	53	88
2,5	59	106
3,0	63,5	106
3,5	67	123—128
4,5	70	150

Tabelle II.

Elektrodenspannung (Volt) des Lichtbogens zwischen Kupferelektroden bei 3 Amp. Stromstärke.

Elektroden- abstand mm	Bogen in CO ₂	Bogen in H ₂
0,5	24	—
0,75	27	81
1,0	30	66—88—90
1,25	—	79—110—110—114
1,5	33	88—110—110—132
1,75	35	—
2,0	40	106—110—119—119—132—132
2,25	38	—
2,5	40,5	123—132—136
2,75	—	136
3,0	43	—
3,5	43,5	—
3,75	47	—
4,0	44	—
4,5	48	—

Die vorstehenden Messungen besitzen natürlich nicht den Wert fest definierter quantitativer Resultate. Es sind indessen aus ihnen mit Sicherheit folgende qualitative Resultate abzulesen.

Das Spannungsgefälle in der positiven Säule des Lichtbogens, als Tangente an die V, l -Kurve ausgedrückt in Volt.cm⁻¹, ist bei gleicher Stromstärke für Kohleelektroden in Wasserstoff größer als in Kohlensäure, es beträgt für 2 mm Elektrodenabstand in jenem Falle 266, in diesem 100 Volt.cm⁻¹. Für die stärker sich abkühlenden Kupferelektroden ist der Unterschied noch größer; das Spannungsgefälle besitzt hier den Wert 373 bez. 60 Volt.cm⁻¹.

Die Schwankungen der Elektrodenspannung für denselben Elektrodenabstand sind gering für den Lichtbogen in Kohlensäure, beträchtlich für den Lichtbogen zwischen Kohleelektroden in Wasserstoff. Für Kupferelektroden in Wasserstoff sind die Schwankungen so groß, daß ein dauerndes Brennen des Bogens überhaupt nicht möglich ist. Bei den für diesen Fall mitgeteilten Messungen brannte der Lichtbogen im günstigsten Fall nur eine halbe Minute lang, ohne zu erlöschen. Diese Verhältnisse erklären sich auf Grund der Darlegungen, welche der eine von uns an anderer Stelle¹⁾ über zulässige und unzulässige Störungen des Lichtbogens gegeben hat. Wir verweisen für das Folgende auf die an jener Stelle gegebenen Figuren. Der Lichtbogen kann nämlich bei festem Elektrodenabstand verschiedene Punkte der Elektroden miteinander verbinden, also verschiedene Längen l besitzen; je größer seine Länge ist, desto größer ist dann seine Elektrodenspannung. Für bestimmte Werte der elektromotorischen Kraft E und des Vorschaltwiderstandes r kann er, ohne zu erlöschen, alle Längen l annehmen, deren zugehörige V, i -Kurven von der Widerstandsgeraden E, r geschnitten werden. Ist die kleinste Länge (Elektrodenabstand) l_0 , die Zunahme der Länge Δl , dV/dl das Spannungsgefälle, so ist die Zunahme der Elektrodenspannung

$$\Delta V = \frac{dV}{dl} \cdot \Delta l.$$

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 12. p. 692. 1903.

Für gleiche Schwankungen der Bogenlänge sind also die Schwankungen der Bogenlänge um so größer, je größer der Spannungsabfall in der positiven Säule ist. Entsprechend sind die zulässigen Schwankungen in der Bogenlänge um so kleiner, je größer dieses Spannungsgefälle ist. Die wirklichen Schwankungen in der Bogenlänge sind aber bedingt durch sekundäre Ursachen, vor allem durch den Auftrieb des erhitzten Gases, sie sind darum in Wasserstoff ebenso groß als in Kohlensäure, ja dort größer als hier infolge der größeren Wattleistung bei gleicher Stromstärke. Lediglich der kleinste Wert der Elektrodenspannung für einen bestimmten Elektrodenabstand kann diesem Abstand als Bogenlänge zugeordnet werden; alle größeren Werte entsprechen größeren Bogenlängen infolge der unvermeidlichen Schwankungen. Darum sind in der Fig. 1 nur die niedrigsten V, l -Punkte bei Cu in H_2 durch eine Kurve verbunden.

Von den gegebenen Kurven ist, wie im Vorbeigehen bemerkt sein mag, noch folgendes abzulesen. Das mittlere Spannungsgefälle in der Säule des Lichtbogens in einer Gasatmosphäre ist nicht unabhängig von dem Elektrodenabstand, es nimmt mit wachsendem Abstand ein wenig ab, da infolge der größeren Leistung die Elektroden¹⁾ von der Säule her stärker erwärmt werden und darum mehr Dampf aussenden. Die V, l -Kurven sind nämlich für Cu und C in CO_2 deutlich ein wenig gekrümmt.

Endlich sieht man, daß die Minimalspannung des Lichtbogens, die Elektrodenspannung für sehr kleine Bogenlänge (Summe aus Anoden- und Kathodenfall), für die gleichen Elektroden nur wenig von der Gasatmosphäre abhängig ist. Die Minimalspannung für Cu-Elektroden ist beträchtlich kleiner als diejenige für C-Elektroden.

§ 3. *Die Methode des Querstromes angewandt auf den Lichtbogen.* — Die Methode des Querstromes²⁾ besteht in folgendem, wie kurz erinnert sein mag. In der Bahn eines Haupt- oder Längsstromes wird mit zwei Sonden eine Niveaufläche der

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 12. p. 701. 1903.

2) Literatur vgl. J. Stark, Ann. d. Phys. 3. p. 492. 1900; Die Elektrizität in Gasen. Leipzig 1902. p. 236.

elektrischen Spannung (Potential) aufgesucht, indem die Sonden gegeneinander so lange verschoben werden, bis ihre Spannungsdifferenz Null geworden ist. Die Sonden werden darauf zu Elektroden gemacht, indem an sie eine elektromotorische Kraft gelegt wird; der dann zwischen ihnen fließende Strom heißt Querstrom. Vorausgesetzt, daß die Ionisation in der Umgebung der Sonden konstant ist, also nicht durch den Querstrom verändert wird, vorausgesetzt ferner, daß der Querstrom eine unselbständige Strömung ist, hängt seine Stärke nicht ab von dem Spannungsabfall des Längsstromes und kann darum als Maß für die Ionisation in der Umgebung der Querelektroden dienen. Es sei nämlich Φ der Spannungsabfall im Längsstrom bei Abwesenheit des Querstromes, speziell sei Φ_0 der Spannungswert der Niveaufläche, in welcher die Querelektroden liegen. Ferner sei $\varphi_1 - \varphi_2$ deren Spannungsdifferenz bei Abwesenheit des Längsstromes und konstant bleibender Ionisation. Die Stärke des Querstromes ist dann $i = k \cdot [\varphi_1 - \varphi_2]$, wo k eine Funktion der Dimensionen und der Ionisation ist. Bei Gegenwart des Längsstromes tritt Superposition der Potentiale oder Spannungen ein, die Spannungswerte an den Querelektroden werden $\Phi_0 + \varphi_1$ bez. $\Phi_0 + \varphi_2$. Da k als konstant vorausgesetzt wird, ergibt sich für den Fall der Superposition von Quer- und Längsstrom als Stärke des Querstromes wieder der gleiche Wert $i = k \cdot [(\Phi_0 + \varphi_1) - (\Phi_0 + \varphi_2)] = k \cdot [\varphi_1 - \varphi_2]$ wie vorher ohne Längsstrom.

Die Unabhängigkeit des Querstromes vom Längsstrom für die gemachten Voraussetzungen haben wir in folgender Weise experimentell geprüft. Auf eine Glasplatte wurde ein rechteckiges Stanniolblatt von 15,5 cm Länge und 3 cm Breite aufgeklebt, an seinen Schmalseiten wurde der Längsstrom zu- bzw. abgeführt. Parallel zu den beiden Längsseiten waren zwei dicke gerade Stifte angebracht, auf diesen ließen sich die Querelektroden verschieben. Diese waren Drähte, ihre Enden, die auf das Stanniolblatt aufgesetzt werden konnten, waren linear geschärft und 2,5 cm voneinander entfernt. Es wurde zunächst der Längsstrom geschlossen, dann wurden die Querelektroden so lange gegeneinander verschoben, bis ein sie verbindendes Galvanometer (Empfindlichkeit $3 \cdot 10^{-7}$ Amp. pro Skalenteil beim Öffnen und Schließen des Längsstromes keinen Ausschlag

mehr zeigte. Damit waren die Querelektroden auf eine Niveaufläche des Längsstromes gebracht. Darauf wurde dieser geöffnet und zwischen den Querelektroden durch Einschaltung eines Akkumulators eine Stromstärke von $21,9 \cdot 10^{-7}$ Amp. hergestellt. Diese Stromstärke blieb dann unverändert erhalten, mochte der Längsstrom in einer Stärke von 2,1 Amp. geschlossen, geöffnet oder kommutiert werden.

Der Querstrom wurde bisher nur zu vergleichenden Untersuchungen der Leitfähigkeiten in verschiedenen Querschnitten eines Längsstromes angewendet. Er kann auch dazu benutzt werden, um die Frage zu beantworten, ob die positiven oder negativen Ionen die größere spezifische Geschwindigkeit besitzen in einer Partie des Längsstromes. Hat man nämlich eine unselbständige Strömung in einem Gas, so stellt sich infolge des Wegwanderns der Ionen an den Elektroden ein Spannungsabfall her. Wie J. J. Thomson¹⁾, E. Riecke²⁾ und G. Mie³⁾ theoretisch gezeigt haben, bildet sich an derjenigen Elektrode der größere Spannungsabfall aus, von welcher die spezifisch schnelleren Ionen wegwandern; das Verhältnis von dem Anoden- zum Kathodenfall bei größerer Stromstärke kann als angenähertes Maß für das Verhältnis der spezifischen Ionengeschwindigkeiten dienen. Diese Folgerungen gelten aber, wie ausdrücklich betont werden muß, nur für die unselbständige Strömung. Bei den selbständigen Strömungen, so auch beim Lichtbogen, stellt sich der Spannungsabfall an den Elektroden nach prinzipiell anderen Forderungen ein. Aus dem Spannungsabfall an den Elektroden in selbständigen Strömungen darf nicht jener Schluß auf die spezifische Ionengeschwindigkeit gezogen werden.

Um über das Verhältnis der spezifischen Geschwindigkeiten der Ionen innerhalb einer selbständigen Strömung Aufschluß zu gewinnen, kann man die von dieser bewirkte Ionisation im Gase benützen, um eine unselbständige Strömung herzustellen. Aus deren Anoden- und Kathodenfall darf man dann auf die spezifische Geschwindigkeit der Ionen der selbst-

1) J. J. Thomson, Phil. Mag. 47. p. 257. 1899.

2) E. Riecke, Ann. d. Phys. 12. p. 52. 1903.

3) G. Mie, Ann. d. Phys. 13. p. 858. 1904.

ständigen Strömung schließen. Dies kann man auf zweierlei Arten erreichen. Entweder kann man das ionisierte Gas schnell aus der Bahn der selbständigen Strömung fortführen und in ihm dann eine unselbständige Strömung herstellen in Abwesenheit des Kraftfeldes der selbständigen Strömung. Die Fortführung des ionisierten Gases muß indes so rasch geschehen, daß die Temperatur und die Art der Ionisation sich nicht ändern; sonst ist nicht mehr der Schluß auf die spezifische Ionengeschwindigkeit in dem Gebiet der selbständigen Strömung gestattet.

Die zweite Möglichkeit besteht darin, über die selbständige Strömung in einer ihrer Partien eine unselbständige zu lagern und deren Anoden- und Kathodenfall zu messen. Hierbei muß indes der Querstrom bereits so stark sein, daß er unmittelbar an seinen Elektroden die Ionisation erniedrigt und so einen Spannungsabfall herstellt. Dadurch beeinflußt er indirekt den Spannungsabfall des Längsstromes. Infolgedessen verlieren die Messungen und Folgerungen an quantitativer Strenge. Immerhin aber kann der Anoden- und Kathodenfall eines unselbständigen Querstromes dazu dienen, die Frage nach der Ungleichheit der spezifischen Ionengeschwindigkeiten zu entscheiden. Damit der Querstrom unselbständig bleibt, darf seine Elektrodenspannung nicht beträchtlich die Ionisierungsspannung der Ionen in der selbständigen Strömung überschreiten. Darum wählten wir sie in den nachstehenden Versuchen nicht größer als 8 Volt. (Ionisierungsspannung in Quecksilberdampf rund 6 Volt).

§ 4. *Verhältnis der Geschwindigkeiten der positiven und negativen Ionen.* — Die eben besprochene erste Möglichkeit, Aufschluß über das Verhältnis der Ionengeschwindigkeiten zu gewinnen, läßt sich beim Quecksilberlichtbogen anwenden. Brennt nämlich dieser in verdünntem Quecksilberdampf in einer Lampe mit einem Kondensationsgefäß (Fig. 2, $\frac{1}{10}$ nat. Größe), so stürzt aus der Strombahn in dieses ein Dampfstrahl mit einer Geschwindigkeit¹⁾, welche bis zu derjenigen des Schalles unter den gegebenen Umständen wachsen kann. In diesem Dampfstrahl findet zwar bereits Abkühlung statt.

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 4. p. 441. 1903.

Immerhin aber befindet sich in ihm der Dampf noch angenähert in demselben Zustand wie in der Strombahn des Lichtbogens. Wir brachten über der Öffnung im Kondensationsgefäß symmetrisch zwei Platinelektroden E_1 und E_2 an. Sie waren 0,5 mm dicke Platindrähte, die aus Glasröhrchen auf eine Länge von 3 mm hervorragten, der Abstand ihrer Enden betrug 15 mm. Zwischen ihnen wurde mit Hilfe einer gut isolierten Batterie von 2, 4, 6 oder 8 Volt durch den Dampfstrahl ein unselbständiger Strom gesandt; indem nur ein geringer Vorschaltwiderstand diesem Strom gegeben wurde, konnte er relativ stark werden (bis zu $2 \cdot 10^{-4}$ Amp.), auch wurde dadurch die ganze Spannung des Stromkreises in seinen dampfförmigen Teil verlegt.

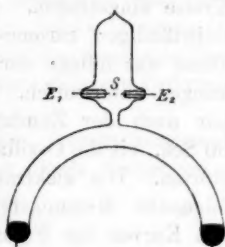


Fig. 2.

Zur Messung des Anoden- und Kathodenfalles diente in allen nachstehenden Fällen eine dritte Sonde (S), deren aus einem Glasröhrchen hervorragende Spitze befand sich immer in der Mitte zwischen den zwei Elektroden E_1 und E_2 . Sie war mit dem einen Pole eines Elektrometers verbunden, dessen anderer Pol konnte entweder mit der Anode oder mit der Kathode des unselbständigen Stromes verbunden werden. Die Spannungsdifferenz (S_a bez. S_k) der Sonde gegen eine Elektrode enthielt darum nicht bloß den Spannungsabfall unmittelbar an der Elektrode (A bez. K), sondern auch noch den Abfall (G) längs einer Strecke im Gas. Es war also zu setzen

$$\frac{S_k}{S_a} = \frac{K + G}{A + G}.$$

Nun ergab sich dieses Verhältnis in allen Fällen größer als 1; darum ist

$$\frac{K}{A} > \frac{S_k}{S_a}.$$

Wenn wir darum im nachstehenden $S_k = K$ und $S_a = A$ setzen, so machen wir einen Fehler, der das Verhältnis der Geschwindigkeiten der negativen und der positiven Ionen im Verhältnis zum wirklichen Wert verkleinert.

Die Kurven der Fig. 3 geben einen Teil unserer Messungen an dem Dampfstrahl aus dem Quecksilberlichtbogen (3 Amp.) wieder. Die Werte der kathodischen Spannungsdifferenz sind als kleine Kreuze, diejenigen der anodischen Differenz als kleine Kreise eingetragen. Zu den ersteren ist die Stärke des unselbständigen Stromes (Einheit = $3 \cdot 10^{-6}$ Amp.) geschrieben. Diese war infolge der Oszillationen des Dampfstrahles Schwankungen unterworfen. Beobachtet wurde von der Zeit unmittelbar nach der Zündung des Lichtbogens in Intervallen von 30 Sek., bis die Oszillationen des Dampfstrahles die Ablesungen störten. Die elektromotorischen Kräfte in den aufeinanderfolgenden Messungsreihen waren 2, 4, 6 und 8 Volt. Von den Kurven der Figur sind folgende Resultate abzulesen.

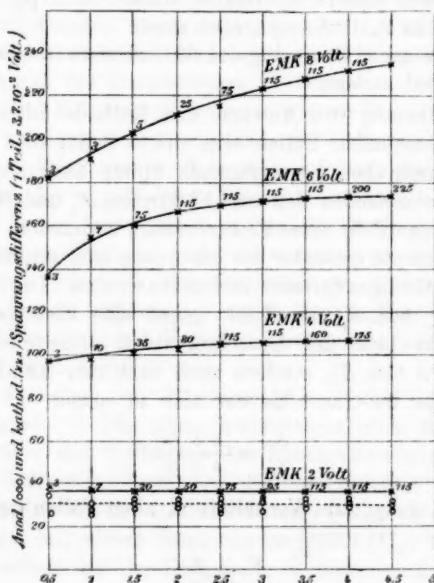


Fig. 3.

Die anodische Spannungsdifferenz ist unabhängig von der Stromstärke, die kathodische Differenz wächst mit der Stromstärke. Für eine elektromotorische Kraft von 8 Volt hat das

Verhältnis der kathodischen zur anodischen Differenz bei starkem Strom den Wert $238/32 = 7,4$. In ionisiertem Quecksilberdampf, der aus der Strombahn des Lichtbogens kommt und sich von dem hier vorhandenen Dampf wenig unterscheidet, ist also der Kathodenfall mehr als 7,4 mal größer als der Anodenfall einer unselbständigen Strömung. In der Strombahn des Lichtbogens in verdünntem Quecksilberdampf ist demnach die spezifische Geschwindigkeit der negativen Ionen von einer höheren Ordnung als diejenige der positiven Ionen.

Auf den Lichtbogen in verdünntem Quecksilberdampf wandten wir auch die oben an zweiter Stelle besprochene Methode an zur Bestimmung des Verhältnisses der Ionengeschwindigkeiten. Wir lagerten nämlich auf den Lichtbogen einen unselbständigen Querstrom und bestimmten dessen anodische und kathodische Spannungsdifferenz. Hierzu diente uns die Röhre, deren Dimensionen in Fig. 4 in $\frac{1}{5}$ nat. Größe wiedergegeben sind. In 10 cm Abstand von der unteren Elektrode waren normal zu den Stromlinien des Lichtbogens die Querelektroden E_1 und E_2 angebracht. Es waren 0,4 mm dicke Platindrähte, welche aus engen Glasröhrchen auf eine Länge von 3 mm frei hervorragten. Ihre Enden hatten einen Abstand zu 10 mm; mitten zwischen ihnen lag das Ende einer Sonde S , die ebenso wie die Querelektroden zugerichtet war; sie stand normal zu diesen und befand sich auf der gleichen Höhe wie sie.

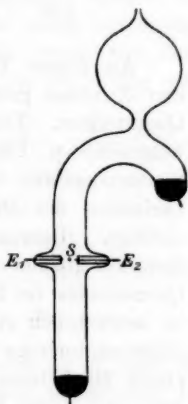


Fig. 4.

Zunächst wurde untersucht, ob die drei sekundären Platinelektroden E_1 , E_2 und S auf einer Niveauebene des Lichtbogens lagen, indem mit dem Elektrometer die Spannungsdifferenzen $S - E_1$ und $S - E_2$ ermittelt wurden. Diese ergaben sich so klein, daß jene Frage bejaht werden konnte. Dann wurden E_1 und E_2 durch eine elektromotorische Kraft von 2, 4, 6 oder 8 Volt, einen Widerstand und ein Amperemeter bei guter Isolation miteinander verbunden, es wurde also ein unselbständiger Querstrom hergestellt. Dessen anodische und

kathodische Spannungsdifferenz wurde dann wieder elektrometrisch bestimmt; die Stromstärke des Lichtbogens wurde hierbei auf 3,1 Amp. gehalten. In Tab. III teilen wir eine von unseren Messungsreihen mit.

Tabelle III.

Elektr. Kraft Volt	Stromstärke 10^{-5} Amp.	Anod. Diff. S_a Volt	Kathod. Diff. S_k Volt
2,02	75	0,64	1,26
4,04	135	0,60	4,01
6,06	142	0,68	6,03
8,08	147	0,80	8,64

An dieser Tabelle fällt auf, daß die Summe aus S_a und S_k etwas größer ist als die elektromotorische Kraft des Querstromes. Diese Erscheinung dürfte sich aus dem oben besprochenen Umstand erklären, daß der Querstrom den Spannungsabfall des Längsstromes etwas ändert, indem er die Ionisation des Dampfes in der Nähe seiner Elektroden erniedrigt. Hiervon abgesehen, ist aus der Tabelle folgendes Resultat abzuleiten. Die kathodische Spannungsdifferenz des Querstromes im Lichtbogen in verdünntem Quecksilberdampf ist beträchtlich größer als die anodische Differenz, für 8 Volt elektromotorische Kraft ist das Verhältnis S_k/S_a ungefähr gleich 10. Demnach ist der Kathodenfall einer unselbständigen Strömung in der Bahn des Lichtbogens durch verdünnten Quecksilberdampf von einer höheren Ordnung als der Anodenfall; das gleiche gilt darum auch von der spezifischen Geschwindigkeit der negativen Ionen in bezug auf diejenige der positiven Ionen. Das gleiche Resultat wurde auf analogem Wege auch für den Querstrom in einem Glimmstrom durch verdünnten Stickstoff bereits früher¹⁾ gefunden.

Schließlich wandten wir die vorstehende Methode auch auf den Kohlelichtbogen in freier Luft an. In diesem Falle liegen die Verhältnisse für exakte Messungen sehr schwierig. Es lassen sich nämlich Schwankungen in der Orientierung des vertikalen Bogens nicht vermeiden; gleichzeitig ist der Spannungs-

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 13. p. 380. 1904.

abfall in der positiven Säule größer als bei niedrigem Dampfdruck. Infolgedessen lassen sich die drei Sonden E_1 , E_2 und S nur kurze Zeit angenähert auf einer Niveauebene des Lichtbogens halten; während weniger Beobachtungen kommen bereits beträchtliche Schwankungen der Niveauebene vor. Indes hat sich trotz der geringen Genauigkeit auch in diesem Falle ganz unzweifelhaft das gleiche Resultat wie für den Quecksilberlichtbogen ergeben.

Als Querelektroden benutzten wir bei dem Kohlelichtbogen in freier Luft 1,5 mm dicke Graphitstifte. Diese wurden, wie Fig. 5 ($\frac{1}{4}$ nat. Größe) zeigt, mittels Klemmschrauben an dicken Kupferstiften befestigt. Diese waren ihrerseits wieder in Klemmschrauben K_1 , K_2 , K_3 befestigt; diese saßen auf einem Rahmen RR aus dickem Messingblech; sie waren von ihm durch eine Zwischenlage aus Hartgummi (in der Figur gestrichelt) isoliert. Der Rahmen wurde zunächst so gegen den vertikalen Lichtbogen horizontal orientiert, daß die drei Sonden E_1 , E_2 , S innerhalb des Lichtbogens sich befanden und darum an ihren Enden glühten. Dann wurden rasch mit dem Elektrometer die Spannungsdifferenzen $S - E_1$ und $S - E_2$ bestimmt; waren

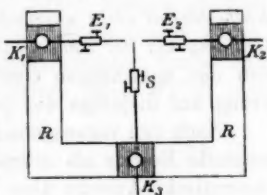


Fig. 5.

sie klein und nahezu gleich, so wurde rasch an E_1 und E_2 die elektromotorische Kraft des Querstromes gelegt und in raschem Wechsel wurden dann S_a und S_k bestimmt, bis die Elektroden E_1 und E_2 infolge von Abbrand aus der heißen Strombahn heraustraten.

In den Tab. IV und V p. 236 sind zwei Reihen als Beispiele der nach der vorstehenden Methode angestellten Beobachtungen mitgeteilt.

Aus diesen und den übrigen zahlreichen hier nicht mitgeteilten Messungen ergeben sich folgende allgemeine Resultate. Die anodische Spannungsdifferenz des Querstromes im Kohlelichtbogen in freier Luft ist infolge der Oszillationen von dessen Niveauflächen relativ großen Schwankungen unterworfen; sie beträgt für eine elektromotorische Kraft von 8 Volt im Mittel ungefähr 1 Volt. Die kathodische Spannungsdifferenz

Tabelle IV.

Stromstärke des Lichtbogens 7,5 Amp.	
Elektr. Kraft des Querstromes 6,06 Volt.	
Kathod. Differenz S_k in Volt	Anod. Differenz S_a in Volt
5,2	-0,2
6,8	+1,0
6,4	+1,0
7,0	+0,2

Tabelle V.

Stromstärke des Lichtbogens 8 Amp.	
Elektr. Kraft des Querstromes 8,08 Volt.	
Kathod. Differenz S_k in Volt	Anod. Differenz S_a in Volt
8,0	+2,4
8,0	+0,8
12,0	-0,8
8,0	+0,8

erfährt keine so großen prozentualen Schwankungen, sie wechselt nie ihr Vorzeichen; sie beträgt im Mittel ungefähr 7 Volt. *Demnach ist auch im Kohlelichtbogen in freier Luft der Kathodenfall eines unselbständigen Querstromes von einer höheren Ordnung als der Anodenfall*; das gleiche gilt auch hier wieder von der spezifischen Geschwindigkeit der negativen Ionen in bezug auf diejenige der positiven Ionen.

Nach den vorausgehenden Untersuchungen darf der experimentelle Beweis als erbracht gelten, daß die oben dargelegte theoretische Ansicht über die Natur der negativen Ionen richtig ist, daß *diese nämlich eine viel größere spezifische Geschwindigkeit als die positiven Ionen im Innern der Strombahn des Lichtbogens besitzen*. Der Grund ist in der Verschiedenheit der Masse der Ionen zu suchen. Die schnellen negativen Ionen im Lichtbogen sind Elektronionen (Kathodenstrahlen). Es sei daran erinnert, daß für die Ionen, welche vom Lichtbogen weg in die umgebende niedrig temperierte Gasatmosphäre durch ein elektrisches Feld getrieben werden können, nach C. D. Child¹⁾ ein anderes Verhältnis der spezifischen Geschwindigkeiten sich ergibt.

§ 5. *Methode zur Messung des Kathodenfalles.* — Unmittelbar an der Kathode des Lichtbogens ist ein großer Spannungsabfall vorhanden; vom kathodischen Lichtbüschel weg in der ungeschichteten positiven Lichtsäule ist der Spannungsabfall räumlich konstant. Die Spannungsdifferenz zwischen der

1) C. D. Child, Phys. Rev. 12. p. 137. 1901.

kathodischen Strombasis und dem Punkt im Lichtbüschel, von dem ab der Spannungsabfall räumlich konstant ist, sei der Kathodenfall des Lichtbogens genannt. Bei niedrigem Dampfdruck erweist sich der Spannungsabfall im kathodischen Lichtbüschel als so klein, daß die Spannungsdifferenz zwischen der Kathode und einem beliebigen Punkte des Lichtbüschels den Kathodenfall genügend genau darstellt.

Die Bestimmung des Kathodenfalles des Lichtbogens ist aus folgenden Gründen mit Schwierigkeiten verbunden. Auch wenn die kathodische Strombasis auf der Kathode unbeweglich fest liegt, wie es beispielsweise beim Kohlelichtbogen in freier Luft der Fall ist, läßt sich eine Sonde im Lichtbüschel nicht beliebig nahe an die Strombasis heranzuführen, weil sonst die Strömung gestört würde. Bei einem Abstand von einigen Millimetern zwischen Sonde und Strombasis geht darum in den zu messenden Kathodenfall immer ein Stück Spannungsabfall aus der Strombahn im Dampf ein. Ist die gemessene kathodische Spannungsdifferenz S_k , der Abstand zwischen Sonde und Strombasis l , das Gefälle in der positiven Säule dV/dl , der Kathodenfall K , so gilt

$$S_k = K + l \cdot \frac{dV}{dl}.$$

Setzt man darum $S_k = K$, so ist der Fehler um so größer, je größer $l \cdot dV/dl$ ist. Dieser Fehler läßt sich dann bestimmen, wenn die kathodische Strombasis fest liegen bleibt; man ermittelt dann l und dV/dl , so daß sich $l \cdot dV/dl$ berechnen läßt. An metallischen Kathoden in einer Gasatmosphäre von höherem Druck ist indes die kathodische Strombasis dauernd in einer ganz unregelmäßigen Wanderung über die Kathodenoberfläche begriffen; das gleiche ist immer dann der Fall, wenn der Lichtbogen im verdünnten Dampf seiner Elektroden brennt. In diesem Falle läßt sich darum l nicht bestimmen, es ist eine ganz unregelmäßig oszillierende positive Funktion der Zeit. Soll deshalb in diesem Fall die gemessene kathodische Spannungsdifferenz S_k den Kathodenfall genügend genau darstellen, so müssen die Versuchsbedingungen so gewählt werden, daß $l \cdot dV/dl$ gegen K sehr klein ist. Dies erreicht man dadurch, daß man dV/dl , also den Dampfdruck, sehr klein macht. Aus diesem Grunde wählten wir bei allen nach-

stehenden Versuchen die Bedingungen so, daß während der Messung der kathodischen Spannungsdifferenz der Druck des Quecksilberdampfes klein blieb.

Die Untersuchung des Anoden- und Kathodenfalles an Quecksilberelektroden wurde ausgeführt an einer hoch evakuierten, dauernd an der Pumpe sitzenden Lampe, welche die in der Fig. 6 ($\frac{1}{5}$ nat. Größe) dargestellte Form hatte. Als Sonde



Fig. 6.

diente ein Platindraht, der in ein Glasrohr von 5 mm äußerem Durchmesser eingeschmolzen war, sein aus ihm in die Lampe hervorragendes Ende war 2 mm lang und am Glas scharf horizontal abgelenkt. Im Glasrohr selbst war der Platindraht in einem Kupferdraht festgemacht, dieser führte durch das Rohr nach außen zum Elektrometer. Das Rohr mit der Sonde konnte in einem Barometerrohr, wie es die Figur zeigt, vertikal verschoben werden. Der Abstand zwischen Sonde und Elektrodenoberfläche wurde mit Hilfe eines Fernrohres gemessen, das an Stelle des Fadekreuzes eine Skala auf Glas besaß; ein Teilstrich derselben entsprach in der Regel 0,588 mm Sondenabstand. Das verwendete Quadrantelektrometer war ein Elster-Geitelches mit großer Dämpfung; 1 mm Skalenteil Ausschlag entsprachen

7,4 bis $9,1 \cdot 10^{-2}$ Volt; das Instrument wurde am Ende jeder größeren Messungsreihe neu geeicht. Die Elektrode E_1 lag an der Erde und dem einen Quadrantenpaar, die Sonde S an dem anderen Quadrantenpaar. Der Lichtbogen in verdünntem Quecksilberdampf wurde in allen Fällen durch Induktion¹⁾ gezündet.

Bevor wir die Abhängigkeit des Kathodenfalles von der Stromstärke untersuchten, studierten wir die Bedingungen, die hierbei zu berücksichtigen sind. Wir untersuchten zunächst den Verlauf des Spannungsabfalles von der Kathode weg nach dem Innern der positiven Säule. Fig. 7 gibt zwei unserer Messungsreihen wieder. Der als Abszisse angetragene Abstand l ist der normale Abstand der Sonde von der Kathoden-

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 12. p. 709. 1903; J. Stark u. R. Küch, Phys. Zeitschr. 6. p. 438. 1905.

oberfläche, nicht der Abstand von der Strombasis; diese ist ja dauernd in einer unregelmäßigen Bewegung in horizontaler Richtung begriffen. Als Ordinate ist die kathodische Spannungsdifferenz zwischen Kathode und Sonde angetragen. Es hat nach den zwei Kurven der Fig. 7 den Anschein, als ob die kathodische Differenz S_k fast bis unmittelbar an die Oberfläche gemessen werden und als ob sie kleiner als 5 Volt sich ergeben könnte. Dies ist aber nur scheinbar. In dem gestrichelten Teil der Kurven finden nämlich zwischen Sonde und Oberfläche schnelle vorübergehende Berührungen statt unter momentanem Nullwerden von S_k ; das Elektrometer gibt aber nur

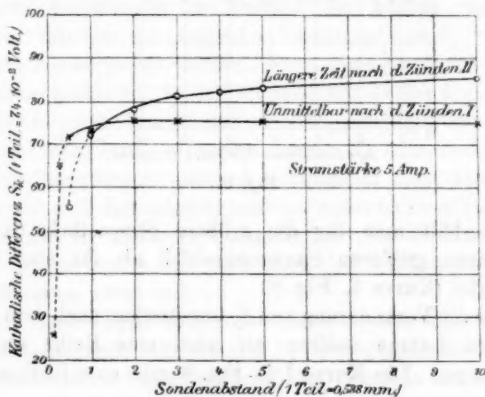


Fig. 7.

das Mittel aus den Amplituden von S_k ; S_k kann darum kleiner werden als K . Die Berührungen zwischen Sonde und Oberfläche werden durch die unregelmäßigen vertikalen Schwankungen bewirkt, zu welchen die Oberfläche durch das Umherirren der kathodischen Strombasis und den Überdruck des Dampfes in dieser veranlaßt wird.

Die Kurve I zeigt, daß der Spannungsabfall in größerem Abstand von der Kathode sehr klein ist entsprechend dem kleinen Dampfdruck, der unmittelbar nach dem Zünden der kalten Lampe vorhanden ist. Die Kurve II wurde aufgenommen, nachdem die Lampe bereits längere Zeit gebrannt, nachdem also infolge Herstellung einer höheren Temperatur im ganzen

Raum der Lampe der Dampfdruck einen höheren Wert angenommen hatte. Wie man sieht, ist in diesem Falle das Spannungsgefälle dV/dl im Dampfraum größer, demgemäß auch

$$S_k = K + l \cdot \frac{dV}{dl}.$$

Läßt man darum bei größerer Stromstärke die Lampe erst stationär einbrennen und nimmt dann wieder die S_k, l -Kurve

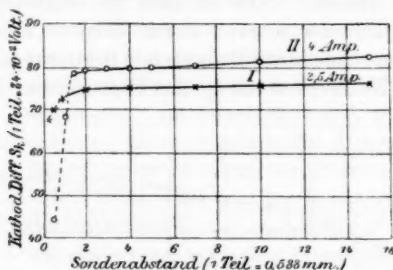


Fig. 8.

auf, so erhält man für die größere Stromstärke (Kurve II, Fig. 8) einen größeren Spannungsabfall als für eine kleinere Stromstärke (Kurve I, Fig. 8).

Über die Veränderung von S_k unmittelbar nach dem Zünden der kalten Lampe stellten wir noch eine Reihe von Beobachtungen an. Die Kurve I in Fig. 9 gibt eine Beobachtungs-

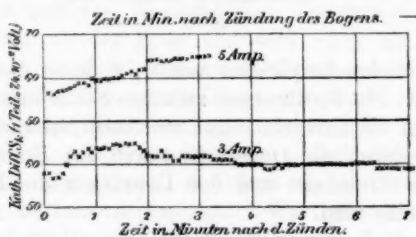


Fig. 9.

reihe wieder. Wie man sieht, nimmt bei kleiner Stromstärke (3 Amp.) die Differenz S_k mit der Zeit erst ein wenig zu, erreicht ein Maximum und stellt sich dann auf einen konstanten Wert ein. Diese Variation von S_k mit der Zeit geht parallel

gewissen Veränderungen in dem Zustande der Lampe. Einmal steigt unmittelbar nach dem Zünden der Dampfdruck des Quecksilbers, um nach einiger Zeit einen stationären Wert anzunehmen; dieser stationäre Wert wird um so früher erreicht, je kleiner die Stromstärke ist. Das kathodische Lichtbüschel ist unmittelbar nach dem Zünden in sehr schneller Bewegung begriffen, mit der Zeit aber mäßigt sich bei steigendem Dampfdruck diese Bewegung. Unmittelbar nach dem Zünden beschlagen sich die noch kalten Wände der Lampe und die Sonde mit kondensierten Quecksilbertröpfchen; bei steigender Temperatur verschwinden diese mit der Zeit. Welche von diesen Änderungen im Zustand der Lampe unmittelbar nach dem Zünden die zeitliche Variation von S_k veranlaßt, kann nicht sicher gesagt werden. Wird die Lampe mit größerer Stromstärke beschickt, so ändert sich der Zustand der Lampe infolge der höheren Temperatur rascher; jenes Maximum von S_k tritt nicht mehr auf, vielmehr nimmt S_k entsprechend dem steigenden Dampfdruck dauernd unmittelbar nach dem Zünden zu und stellt sich dementsprechend auf einen höheren stationären Wert ein als bei kleinerer Stromstärke. Ist die Lampe beim Zünden bereits warm, so tritt auch bei kleiner Stromstärke jenes Maximum nicht auf.

§ 6. *Kathodenfall und Stromstärke.* — Aus den vorstehenden Untersuchungen ergeben sich für eine quantitative Messung des Kathodenfalles folgende Resultate. Erstens muß man die kalte Lampe bei kleiner Stromstärke zünden und sie dann bei kleiner Stromstärke stationär einbrennen lassen (Fig. 8, Kurve I). Zweitens ist bei niedrigem Dampfdruck dV/dl in einigem Abstand von der Kathode so klein, daß $S_k = K$ gesetzt werden darf; dementsprechend darf dann auch der Abstand der Sonde von der Kathode bis zu 10 mm variiert werden, ohne daß der Fehler $l \cdot dV/dl$ merklich wird. Drittens darf bei größerer Stromstärke der stationäre Zustand bei der Messung von S_k nicht abgewartet werden; sonst wird mit steigendem Dampfdruck $l \cdot dV/dl$ so groß, daß nicht mehr $S_k = K$ gesetzt werden darf (Fig. 8, Kurve II). Will man darum für größere Stromstärken K durch S_k messen, so muß man die Lampe erst bei kleiner Stromstärke zünden und stationär einbrennen lassen. Dann muß man schnell die Stromstärke erhöhen und S_k messen,

dann wieder schnell auf die kleine Stromstärke zurückgehen und durch erneute Messung von S_k kontrollieren, ob nicht unterdessen der Dampfdruck bereits störend groß geworden ist.

Demgemäß wählten wir folgende Methode. Es wurde zunächst die Sonde auf 3,3 mm Abstand von der Kathodenoberfläche eingestellt, dann zündete der erste Beobachter mit 3 oder 4 Amp., der zweite las darauf die Nullstellung des Elektrometers ab, der dritte notierte die Ablesung. Darauf wurde das Elektrometer an die Sonde gelegt; der zweite Beobachter nannte den Ausschlag A_1 , wenn er konstant geworden; der dritte notierte ihn. Darauf stellte der erste schnell auf eine verabredete größere Stromstärke ein, las laut das Amperemeter ab, unmittelbar darauf las auch der zweite laut den Ausschlag des Elektrometers ab; gleich darauf brachte der erste die Stromstärke wieder auf 4 Amp., las laut das Amperemeter ab, worauf sofort auch der zweite den Elektrometersausschlag A_2 ablas. Der dritte hatte unterdessen sämtliche Ablesungen notiert und kontrollierte zum Schlusse noch den Sondenabstand. Waren A_1 und A_2 nicht mehr als 2 mm verschieden, so konnte angenommen werden, daß während der ganzen Beobachtung der Dampfdruck so gut wie konstant geblieben war; im anderen Falle wurde die Beobachtung verworfen. Wir geben in folgender Tabelle ein Beispiel unseres Verfahrens.

Tabelle VI.

Beobachter	Handlung	Beobachter	Handlung
III	Sonde 6 Teile	II	693
I	zündet	III	notiert
I	4 Amp.	I	4 Amp.
II	Null 750	II	691
II	692 konstant	III	notiert
III	notiert	III	Sonde 6 Teile
I	30 Amp.		

Nach diesem Verfahren haben wir den Kathodenfall für 2—3—4—5—7—10—15—20—30—40—50 Amp. in mehrfacher Wiederholung bestimmt; für 50 Amp. haben wir nur zwei Beobachtungen angestellt; auch gelang es uns in diesem Falle nicht, wieder auf 4 Amp. zurückzugehen; kaum hatte

nämlich der zweite Beobachter das Elektrometer abgelesen, so sprang beidemal auch bereits die Röhre an der Einschmelzstelle einer Platinzuleitung.

Aus den vorstehenden Beobachtungen ergab sich nun mit Sicherheit folgendes allgemeine Resultat. Für alle Stromstärken im Bereich von 2—50 Amp. zeigte das Elektrometer, während es den Kathodenfall maß, unregelmäßige Schwankungen von ± 1 mm um den Ausschlag von 58 mm. *Im Bereich von 2 bis 50 Amp. ist darum der Kathodenfall des Lichtbogens in Quecksilberdampf an einer Quecksilberelektrode unabhängig von der Stromstärke und bis auf $\pm 1,7$ Proz. genau gleich 5,27 Volt.*

Gegenüber diesem quantitativen Resultat mag der Einspruch erhoben werden, daß vielleicht der Kathodenfall $K = 5,27$ Volt nicht genau den Spannungsabfall im Dampf zwischen Sonde und Kathode darstellt, sondern daß in ihm eine Spannungsdifferenz enthalten ist, welche durch die Verschiedenheit des Materiales von Sonde (Pt) und Kathode (Hg) bedingt ist. Nun ist zwar nach Warburg¹⁾ die sogenannte Voltadifferenz zwischen zwei verschiedenen Metallen im Vakuum bei Beseitigung einer an ihnen haftenden Wasserhaut nicht mehr vorhanden. Gleichwohl hielten wir es für nötig, den Einfluß des Sondenmaterialies zu untersuchen, bevor wir an die vorstehenden definitiven Messungen gingen. Wir ersetzten zu diesem Zwecke die Platinsonde durch eine Quecksilbersonde. In ein Glasröhrchen wurde, wie Fig. 10 zeigt, in 2,5 cm Abstand von der Öffnung ein Platindraht eingeschmolzen. An dessen einem Ende war wieder der Kupferdraht befestigt, der durch das Sondenrohr nach dem Elektrometer leitete, das andere Ende ragte einige Millimeter in das offene Rohrende, dieses wurde mit Quecksilber gefüllt, dessen Kuppe diente dann als Sonde. Wir wiederholten mit dieser Hg-Sonde alle Beobachtungen, die wir mit der Pt-Sonde angestellt hatten; wir fanden weder in quantitativer noch qualitativer Hinsicht einen Unterschied zwischen den Resultaten mit den zwei Sonden. Aus diesem



Fig. 10.

1) E. Warburg, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 1904. p. 850; H. Greinacher, Ann. d. Phys. 16. p. 708. 1905.

Grunde verwendeten wir zu den weiteren Messungen ausschließlich die Pt-Sonde.

§ 7. *Der Anodenfall in der Anodenschicht an kalter Anode.* — Entsprechend den drei verschiedenen Werten, welche die Theorie von dem Anodenfall des Lichtbogens fordert, stellten wir unter drei prinzipiell verschiedenen Versuchsbedingungen Beobachtungen über den Anodenfall an. Wir teilen zunächst unsere Messungen für den Fall mit, daß die Anode von der Anodenschicht auf ihrer ganzen Oberfläche bedeckt ist und eine relativ niedrige Temperatur hat. Dieser Fall liegt an einer Quecksilberanode bei niedrigem Dampfdruck vor. Die Messungen wurden in diesem Falle ganz analog wie diejenigen für den Kathodenfall ausgeführt. Es wurde die gleiche Pt-Sonde und die gleiche Röhre (Fig. 6) verwendet; nur diente die Elektrode E_1 nunmehr als Anode.

Der Anodenfall ist analog dem Kathodenfall als diejenige Spannungsdifferenz zu definieren, welche zwischen der anodischen Strombasis und demjenigen Stromquerschnitt vor ihr im Dampfraum liegt, von welchem ab das Spannungsgefälle räumlich konstant ist. Entsprechend dieser Definition hatten wir zunächst über die räumliche Variation der Spannung von der

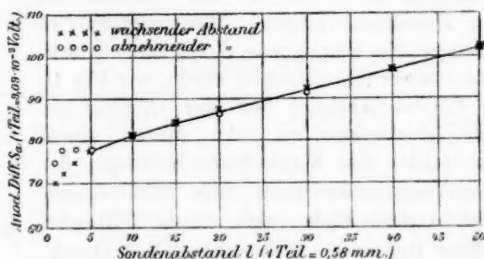


Fig. 11.

Anode weg Untersuchungen anzustellen. Man schien erwarten zu dürfen, daß man in dieser Hinsicht an der Anode exaktere Messungen ausführen könnte; denn hier liegt ja die Strombasis fest, indem sie bei niedrigem Dampfdruck die ganze Oberfläche bedeckt; die Niveauflächen müssen hier wenigstens bei Abwesenheit der Sonde Ebenen sein, die parallel der

Anodenoberfläche sind. Indes erfüllte sich diese Erwartung nicht. Bei zyklischer Variation des Sondenabstandes ließ sich eine Übereinstimmung der Spannungswerte für den gleichen Sondenabstand wohl für größere Abstände erzielen, aber nicht unmittelbar an der Anode selbst. Hier erfuhren die Niveauflächen offenbar durch die Gegenwart der Sonde und durch die von ihr bewirkte Deformation der Anodenoberfläche eine unregelmäßige Störung. In Fig. 11 ist eine derartige zyklische Variation mitgeteilt.

Wenn nun auch unmittelbar an der Anode die räumliche Variation der Spannung nicht genau verfolgt werden kann, so lehrt doch das Beispiel der Kurve in Fig. 11, daß selbst bei niedrigem Dampfdruck das Gebiet, in welchem der Anodenfall liegt, nicht weiter als 3 mm von der Anode weg sich erstreckt; um so mehr muß dies bei höherem Druck der Fall sein. Darum kann der Anodenfall A aus der gemessenen anodischen Spannungsdifferenz S_a gemäß der Gleichung

$$S_a = A + l \cdot \frac{dV}{dl}$$

durch Messung von l und dV/dl berechnet werden.

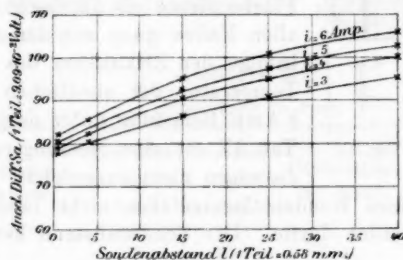


Fig. 12.

In Fig. 12 sind mehrere Messungsreihen der anodischen Differenz S_a und des Sondenabstandes l für verschiedene Stromstärken mitgeteilt. Durch Interpolation ($S_a = K$) wurde aus ihnen die Tab. VII berechnet.

Tabelle VII.

Stromstärke Amp.	Anodenfall Volt
3	7,0
4	7,1
5	7,3
6	7,4

Tabelle VIII.

Stromstärke Amp.	Anodenfall Volt
3	6,4
4	6,5
6	6,7
8	6,9
10	7,0

Aus ihr folgt, daß der Anodenfall an flüssigem Quecksilber bei ganz bedeckter Anodenoberfläche etwas mit der Stromstärke wächst. Das gleiche folgt aus der Tabelle VIII, welche die anodische Spannungsdifferenz (Anodenfall) bei einem Sondenabstand von 2,3 mm für verschiedene Stromstärken bei schneller zyklischer Variation derselben wiedergibt. Aus beiden Tabellen berechnet sich als Minimum des Anodenfalles (für sehr kleine Stromstärke) der Wert 6,35 Volt.



Fig. 13.

Wir untersuchten weiter den Anodenfall an einer kalten Eisenanode. Diese war, wie Fig. 13 zeigt, ein zylindrischer, oben offener Behälter aus Eisen, seine Wandstärke betrug 1 mm; er wurde von einem Eisenstift axial von oben gehalten und war gefüllt mit Quecksilber; der Abstand zwischen ihm und der Glaswand betrug 0,5–1,3 mm. Seine untere Fläche diente als anodische Strombasis, sie war in allen Fällen ganz mit der Anodenschicht bedeckt. Infolge der Zirkulation des Quecksilbers blieb die Temperatur der anodischen Strombasis selbst bei 8 Amp. Belastung unter derjenigen der Rotglut. In Tab. IX ist eine Messungsreihe mitgeteilt; sie ist deswegen nicht ausgedehnt, weil die Röhre mangels eines Kondensationsgefäßes nicht lange mit Strom belastet werden durfte. Der Sondenabstand betrug 1,7 mm.

Tabelle IX.

Stromstärke Amp.	Anodenfall Volt
3	6,07
5	6,18
7	6,30

Wie aus der vorstehenden Tabelle und aus anderen Messungen hervorgeht, nimmt der Anodenfall an einer niedrig temperierten Eisenanode in Quecksilberdampf mit der Stromstärke ebenfalls ein wenig zu. Er ist nahezu gleich dem Anodenfall an einer Quecksilberanode, aber immerhin deutlich kleiner. Es ist zu erwarten, daß auch der Anodenfall des Lichtbogens in der

Anodenschicht ebenso vom Material der Anode abhängt, wie derjenige des Glimmstromes.¹⁾

§ 8. *Der Anodenfall in der Anodenschicht an heißer Anode.* — Zur Untersuchung des Anodenfalles in Quecksilberdampf an einer heißen Anode verwendeten wir Kohle als Anode. Als solche diente, wie Fig. 14 zeigt, ein vertikal gestellter 5 mm dicker, 8 cm langer Kohlenstift, er war umgeben von einem Glasrohr; der Abstand zwischen seiner Oberfläche und dessen innerer Wand betrug 1,5 mm; der Kohlenstift ragte 6 mm aus dem Glasrohr hervor; seinem Ende gegenüber befand sich in 1,5 mm Abstand die Platinsonde *S*. Die Lampe besaß kein Kondensationsgefäß; infolgedessen stieg in ihr der Dampfdruck ziemlich rasch mit der Zeit nach dem Zünden. In den Tabellen X und XI sind zwei unserer Messungsreihen wiedergegeben.



Fig. 14.

Tabelle X.

Stromstärke 3 Amp.

Zeit nach d. Zünden Sek.	Anoden- fall Volt	Glühzustand der Anode
10	12,4	hellrot
20	11,1	
30	10,1	
40	9,8	
50	9,6	
60	11,1	dunkel
70	5,3	
80	5,0	
90	4,8	
100	4,7	

Tabelle XI.

Stromstärke 10 Amp.

Zeit nach d. Zünden Sek.	Anoden- fall Volt	Glühzustand der Anode
5	13,6	gelb
10	13,3	
15	11,1	
20	7,0	dunkelrot
25	6,6	
30	6,6	
35	6,6	
40	6,6	

Die vorstehenden Tabellen lehren folgendes. *An einer glühenden Anode ist der Anodenfall des Lichtbogens größer als an einer niedrig temperierten. Die Erhöhung des Anodenfalles durch Temperatursteigerung der anodischen Strombasis hängt auch*

1) Cl. Skinner, Wied. Ann. 68. p. 752. 1899.

ab von der Dichte des Dampfes vor der Anode, sie ist um so kleiner, je größer die Dampfdichte ist. Da die Erhöhung der Dampfdichte demnach mit einer Erniedrigung der Anodentemperatur verbunden ist und da mit dieser sehr schnell der Anodenfall sinkt, so muß der Übergang des Anodenfalles von dem Werte an „heißer“ zu dem Werte an „kalter“ Anode ebenfalls sehr schnell erfolgen. Ferner sei noch darauf hingewiesen, daß auch hier der „kalte“ Anodenfall von dem Material der Anode als abhängig sich erweist; während er an Hg 6,4, an Fe 6,07 beträgt, ist er an C 4,7 Volt bei 3 Amp. Stromstärke.

§ 9. Der Anodenfall im kathodischen Lichtbüschel an kalter Anode. — Um einen Lichtbogen zu gewinnen, der keine Anodenschicht und keine positive Lichtsäule besitzt, sondern nur aus dem kathodischen Lichtbüschel besteht, muß man die Anode der Kathode so nahe bringen, daß sie von dem

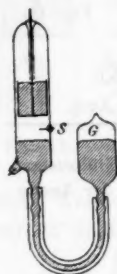


Fig. 15.

kathodischen Lichtbüschel berührt wird. Wir konstruierten zu diesem Zwecke die in Fig. 15 dargestellte Lampe ($\frac{1}{4}$ nat. Größe). Als Anode diente wieder der bereits oben beschriebene zylindrische, mit Hg gefüllte Behälter aus Eisen, als Kathode flüssiges Quecksilber. Die Lichtbogenröhre setzte sich unten in einer engeren Röhre fort; über diese war ein dickwandiger Gummischlauch geschoben; in dessen anderes Ende war ein weites zylindrisches Glasgefäß (G) geschoben. Dieses war mit Quecksilber gefüllt. Durch Heben und Senken des Gefäßes G konnte in der Lichtbogenröhre das Niveau des Quecksilbers zum Steigen und Sinken gebracht werden. Die Platinsonde S diente dazu, den Anoden- oder Kathodenfall zu messen; sie war von der Anode 5 mm entfernt.

Wir operierten in folgender Weise mit der Lampe. Erst wurde G so weit gehoben, bis das kathodische Quecksilber die Eisenanode berührte; dann wurde G wieder gesenkt, so daß der Lichtbogen sich zündete. Indem G verschieden tief gesenkt wurde, wurde der Abstand zwischen Anode und Kathode variiert. Dieser Abstand konnte im allgemeinen nicht kleiner als 5 mm gewählt werden, weil sonst infolge der turbulenten Bewegung der Kathodenoberfläche vorübergehende Berührung

zwischen Kathode und Anode erfolgte. Nachdem schnell ein bestimmter Abstand zwischen Anode und Kathode hergestellt war, wurde rasch hintereinander Stromstärke, Elektrodenspannung oder Anoden- bez. Kathodenfall abgelesen, bis infolge zu großer Erhitzung der Strom unterbrochen werden mußte.

Da der Kathodenfall unabhängig von der Stromstärke ist und an einer Hg-Kathode in Hg-Dampf $5,27 \pm 0,09$ Volt beträgt, so kann man bei Abwesenheit der positiven Lichtsäule, also bei kleinem Elektrodenabstand, den Anodenfall aus der Elektrodenspannung E und dem bekannten Kathodenfall K berechnen gemäß der Gleichung $E = A + K$. Unter der Annahme, daß $K = 5,36$ Volt sei, ist in dieser Weise A in der nachstehenden Tabelle gemäß der Gleichung $A = (E - 5,36)$ Volt berechnet. E wurde mit einem aperiodischen Deprez-Zeiger-Voltmeter gemessen. Der Elektrodenabstand variierte zwischen 5 und 10 mm.

Tabelle XII.

Stromstärke	Elektroden- spannung	Anodenfall
Amp.	Volt	Volt
3,6	8,5	3,14
4,4	8,6	3,24
5,7	8,7	3,34
6,4	8,8	3,44
9,3	9,0	3,64

Ein Vergleich der vorstehenden Tabelle mit der Tab. IX lehrt, daß der Anodenfall an kaltem Eisen im kathodischen Lichtbüschel kleiner ist als in der Anodenschicht. Daß auch in diesem Falle der Kathodenfall den Wert ($5,27 \pm 0,09$) Volt besitzt, stellten wir noch sicher durch direkte Messungen von K mit Hilfe der Sonde. Es ergab sich K im Minimum zu 5,3 Volt. Indes waren die Elektrometerrausschläge größeren Schwankungen unterworfen, als in den oben mitgeteilten Beobachtungen; dies rührte offenbar von den beträchtlichen Schwankungen der Niveauflächen und der Nähe des Anodenfalles her.

Weiter beobachteten wir die Elektrodenspannung für sehr kleinen Elektrodenabstand an einer Lampe, wie sie in Fig. 16

($\frac{1}{3}$ nat. Größe) dargestellt ist. Als Anode diente ähnlich der Eisenanode ein Aluminiumbehälter, der mit Quecksilber zur Kühlung gefüllt war. Er saß unmittelbar über der Öffnung des 5 mm weiten Ansatzrohres *R*, dieses war vor Beginn der Beobachtung nahezu bis oben mit Quecksilber gefüllt. Durch Neigen der Lampe wurde der Lichtbogen gezündet und unmittelbar darauf wurde seine Stromstärke und Elektrodenspannung abgelesen. Als kleinster Wert der letzteren wurde



Fig. 16.



Fig. 17.

für 3 Amp. 8,2 Volt gefunden, woraus als Anodenfall im kathodischen Lichtbüschel an Al der Wert 2,84 Volt sich berechnet. Für 3,8 Amp. war $A = 3,64$ Volt.

Der Anodenfall *A* im kathodischen Lichtbüschel läßt sich nicht an einer Hg-Anode bestimmen. Denn die Anode läßt sich in diesem Falle nicht unmittelbar über der Kathode anordnen, sondern nur unmittelbar neben ihr, wie es Fig. 17 ($\frac{1}{3}$ nat. Größe) zeigt. In diesem Falle berührt darum das kathodische Lichtbüschel die Anode nicht; kommt es dieser einmal zufällig nahe, so wird es durch den von der Anode ausgehenden Dampfstrom sofort wieder zur Seite geblasen. Als kleinste Elektrodenspannung fanden wir für diese Lampe 12,5 Volt. Die Summe aus Kathodenfall ($5,27 \pm 0,09$) und dem Anodenfall in der Anodenschicht an einer Hg-Anode ($A = 7,0$ nach Tab. VII) beträgt ($12,27 \pm 0,09$) Volt.

§ 10. *Resultate.* — Im folgenden seien kurz die experimentellen Resultate der vorliegenden Untersuchung zusammengestellt.

Das Spannungsgefälle in der Lichtbogensäule ist für eine Gasatmosphäre aus Wasserstoff größer als für eine Atmosphäre aus Kohlensäure; für Kupferpole ist der Unterschied größer als für Kohlepole. Die Erscheinung erklärt sich aus der Abkühlung der Elektroden und der Lichtbogensäule durch die umgebende Gasatmosphäre.

Der Kathodenfall der unselbständigen Strömung in verdünntem Hg-Dampf, der aus dem Lichtbogen kommt, ist ungefähr 10 mal größer als der Anodenfall. Das gleiche gilt

für den unselbständigen Querstrom im Lichtbogen in verdünntem Hg-Dampf und im Lichtbogen zwischen Kohlepolen in freier Luft. Aus diesem großen Unterschied zwischen dem Anoden- und Kathodenfall der unselbständigen Strömung ist auf einen großen Unterschied der Geschwindigkeiten und der Massen der positiven und negativen Ionen im Innern des Lichtbogens zu schließen.

Der Kathodenfall des Lichtbogens in Hg-Dampf an einer Hg-Kathode ist unabhängig von der Stromstärke.

Der Anodenfall des Lichtbogens ist abhängig von einer Reihe Faktoren. Er wächst im allgemeinen etwas mit der Stromstärke, wenn die Anode ganz von der Strömung bedeckt ist.

In der Anodenschicht an kalter Anode ist der Anodenfall größer als in dem kathodischen Lichtbüschel an kalter Anode, kleiner als in der Anodenschicht an heißer Anode. Im letzten Falle steigt er mit der Temperatur der Anode und sinkt mit steigender Dichte des Dampfes vor der Anode. Der Anodenfall in der Anodenschicht ist abhängig von dem Material der Anode.

Die vorstehenden Resultate befinden sich alle in Übereinstimmung mit den Folgerungen der Ionentheorie des Lichtbogens.

Zum Schlusse sei Hrn. Prof. Dr. E. Riecke auch an dieser Stelle Dank gesagt für die Unterstützung, welche er der vorstehenden Untersuchung gewährte.

Göttingen, Juli 1905.

(Eingegangen 22. Juli 1905.)

2. Untersuchung über die Leistungsfähigkeit der Assmannschen Methode zur experimentellen Bestimmung des Verhältnisses $c_p/c_v = \alpha$ der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und konstantem Volumen von Gasen;
von Balthasar Hartmann.

(Auszug aus der Göttinger Dissertation.)

Einleitung.

Das Assmannsche¹⁾ Verfahren benutzt ein U-förmig gebogenes Glasrohr, gefüllt mit Quecksilber, über dessen beiden Spiegeln Gasmassen abgesperrt sind. Wenn man das Rohr einen Augenblick aus seiner Ruhelage bringt, gerät die Flüssigkeit unter dem Einflusse der Schwerkraft und der Gasdrucke in Schwingungen, die durch die Störung der inneren und äußeren Reibung gedämpft werden. Der Erfinder der Methode legt seinen Überlegungen die Annahme zugrunde, daß die Reibung unberücksichtigt bleiben darf, und setzt außerdem stillschweigend voraus, daß die Deformationen des Gases adiabatisch verlaufen. So findet er eine Relation, in der α als eine Funktion nur der Schwingungsdauern der Quecksilbersäule bei geschlossener und offener Röhre und des Gasdruckes erscheint.

Von Assmann selbst liegen wirkliche Bestimmungen der Größe α nicht vor; seine wenigen Beobachtungen sollten nur zur Orientierung dienen. Er beschränkt sich darauf, einige Winke zu geben für den Fall, daß später jemand seine Untersuchungen aufnehmen sollte, z. B. weist er auf die Notwendigkeit hin, behufs Verminderung des Reibungseinflusses eine möglichst weite Röhre anzuwenden.

Erst Müller²⁾ hat nach der Methode gearbeitet. Er versucht zwar eine Reibungskorrektur anzubringen; weil er jedoch von der von Stefan³⁾ ausgesprochenen unzutreffenden

1) C. Assmann, Pogg. Ann. 85. p. 1. 1852.

2) P. A. Müller, Wied. Ann. 18. p. 94. 1883.

3) J. Stefan, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien. 46. II. p. 510. 1862.

Vorstellung ausgeht, als fände eine Verschiebung der einzelnen Quecksilberfäden gegeneinander dank der Kohäsion nicht statt, sondern allein eine Reibung der starr gedachten Flüssigkeitssäule an der Rohrwand, kommt er zu einer illusorischen Korrektur, die innerhalb seiner Fehlergrenzen liegt.

Die Frage, ob die Gaszustandsänderungen hinreichend adiabatisch sind, legt Müller sich nicht vor. Wasserstoff, dessen Untersuchung wegen seiner großen Wärmeleitfähigkeit und großen Beweglichkeit seiner Teilchen einen gewissen Aufschluß darüber gegeben hätte, befindet sich nicht unter den 21 von ihm untersuchten Gasen.

Berücksichtigt man noch, daß Müller eine in seiner Formel für α auftretende Konstante des Apparates, den mittleren Querschnitt der von den Quecksilberspiegeln bei den Oszillationen passierten Rohrstücke, gleich dem Mittel der Rohrendquerschnitte setzt, so werden seine Resultate nicht völlig einwandfrei erscheinen.

Etwa gleichzeitig mit Müller hat sich Hr. Geh. Regierungsrat W. Voigt mit der Ausarbeitung der Methode beschäftigt, beim Erscheinen von Müllers Arbeit (das mit seiner Übersiedelung nach Göttingen nahe zusammenfiel) jedoch seine Untersuchungen abgebrochen. Er fand im Gegensatz zu Müller immer viel zu kleine Zahlen für α und wurde dadurch in dem Eindruck bestärkt, daß die Assmannsche Methode einer besonderen theoretischen Durcharbeitung bedürfte. Auf seine Veranlassung hin habe ich die Untersuchungen wieder aufgenommen. Die vorliegende Arbeit macht sich zur Aufgabe, Assmanns Methode auf ihre Leistungsfähigkeit hin zu prüfen. Zu dem Zwecke wird der Einfluß der vorhandenen Fehlerquellen teils auf experimentellem Wege beseitigt, teils durch theoretische Überlegungen soweit wie möglich berücksichtigt. Nebenbei wird sich ergeben, daß Müller mit nicht genau definierten Verhältnissen gearbeitet hat, insofern als bei seiner Experimentsanordnung die Dämpfung der Flüssigkeitsschwingungen nicht logarithmisch und die Schwingungsdauer nicht konstant ist, und daß er seine verhältnismäßig großen Zahlen für α wahrscheinlich einer teilweisen Kompensation der Fehler verdankt, die infolge Vernachlässigung der Reibung und des Wärmeaustausches zwischen Gas und Umgebung entstehen.

I. Theoretischer Teil.

Statt eines U-förmigen ist der Theorie und Beobachtung ein kreisringförmiges Rohr zugrunde gelegt worden, wie es durch Rotation eines Kreises um eine in seiner Ebene liegende, die Peripherie nicht schneidende Achse erzeugt wird. Das zu behandelnde Problem ist dann folgendes.

Eine in einem kreisringförmigen Rohr mit horizontaler Rotationsachse befindliche Quecksilbermasse, über deren Oberflächen zwei Gasmassen abgeschlossen sind, führt, durch einen äußeren Impuls aus ihrer Ruhelage gebracht, unter der Wirkung der Schwerkraft, der Gasdrucke und der auftretenden Reibungskräfte Schwingungen aus. Die Gasdrucke hängen ab von den durch die Oszillationen hervorgerufenen Verdichtungen und Verdünnungen, sowie von ihren Begleiterscheinungen, den Erwärmungen und Erkaltungen des Gases, deren Stärke mit dem Verhältnis $\kappa = c_p/c_v$ der spezifischen Wärmen im Zusammenhang steht, und von dem unvermeidlichen Wärmeaustausch zwischen Gas und Gefäßwand. Gesucht wird die Beziehung zwischen den die Flüssigkeitsbewegung charakterisierenden Größen, eventuell Schwingungsdauer und logarithmisches Dekrement, und den wirkenden Kräften, um mittels dieser Beziehung κ durch Beobachtungsgrößen auszudrücken.

Behufs Erreichung des Zieles soll schrittweise vorgegangen werden.

1. Ableitung der dem Problem angepaßten Gleichungen.

Die hydrodynamischen Gleichungen.

Den Ausgangspunkt bilden die hydrodynamischen Gleichungen für inkompressible Flüssigkeiten

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{\partial(\Phi + II)}{\partial x} + \frac{a}{s} \Delta u, \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial(\Phi + II)}{\partial y} + \frac{a}{s} \Delta v, \\ \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial(\Phi + II)}{\partial z} + \frac{a}{s} \Delta w. \end{cases}$$

Die darin vorkommenden Größen beziehen sich auf die Stelle x, y, z irgendeines rechtwinkligen Koordinatensystems X, Y, Z , und zwar bezeichnen u, v, w die Geschwindigkeitskomponenten

parallel den Koordinatenachsen, t die Zeit, also du/dt , dv/dt , dw/dt die Komponenten der Beschleunigung, Φ das Potential der äußeren Kraft, Π eine Funktion des Druckes p , und zwar

$$(1) \quad \Pi = \frac{p}{s},$$

s die Dichte, a den Koeffizienten der inneren Reibung.

Außer der Kontinuitätsgleichung für inkompressible Flüssigkeiten

$$(1'') \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

kommen noch die Grenz- und Oberflächenbedingungen hinzu. Gestützt auf unten (p. 281—283) erörterte Wahrnehmungen soll der Koeffizient der äußeren Reibung gleich unendlich gesetzt werden. Dann heißen die Bedingungen für die Rohrwand, wenn die darauf bezüglichen Größen durch einen darüber gesetzten Strich gekennzeichnet werden,

$$(1''') \quad \bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = 0.$$

Die Oberflächenbedingungen, d. h. die Gleichungen für die Gasdrucke, müssen aus dem Problem selbst mit berechnet werden.

Die Transformationsformeln zu Riemannschen Ringkoordinaten.

Der Ring und das Koordinatensystem X, Y, Z sollen so zueinander orientiert werden, daß die horizontal liegende Rotationsachse des Körpers (Fig. 1) in die Z -Achse fällt, die Mittelpunkte des erzeugenden Kreises in seinen beiden horizontalen Lagen auf die X -Achse zu liegen kommen und demgemäß die Y -Achse Durchmesser des Kreises in seinen vertikalen Lagen ausschneidet. Dann gelten für die Transformation der Koordinaten x, y, z zu Riemannschen Ringkoordi-

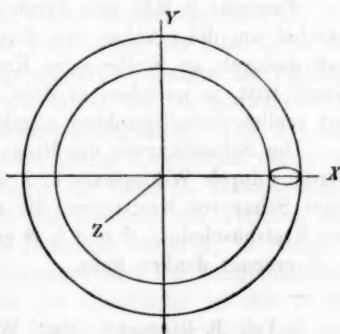


Fig. 1.

naten ε , λ , ϑ unter Vermittelung einer Variablen ϱ und Benutzung einer Konstanten b folgende Formeln¹⁾:

$$(2) \quad x = \varrho \cos \vartheta, \quad y = \varrho \sin \vartheta,$$

$$(2') \quad \varrho + iz = b \frac{1 - \varepsilon e^{i\lambda}}{1 + \varepsilon e^{i\lambda}}.$$

Während ϱ den Radiusvektor vom Nullpunkte zu einem Punkt der Ebene XY und ϑ den Winkel zwischen ϱ und der X -Achse darstellt, sind bei konstantem ϑ die Variablen ε und λ Parameter der Hälften zweier konjugierten Kreisbüschel in der Halbebene mit dem Neigungswinkel ϑ . ε liefert das Büschel mit imaginären, λ das mit reellen Schnittpunkten. Dem ersteren Büschel gehört auch der den Kreisring durch Rotation um die Z -Achse erzeugende Kreis an. Bezeichnet man die ϱ -Koordinate seines Mittelpunktes mit c , seinen Radius mit R und den ihm entsprechenden Parameter mit $\bar{\varepsilon}$, so gilt

$$(3) \quad \bar{\varepsilon} = \frac{R}{c + b}, \quad b^2 = c^2 - R^2.$$

Die zweite Gleichung (3) stellt die Bedeutung der Konstanten b fest als Tangentenabschnitt vom Nullpunkt zum Kreis.

Zur eindeutigen Bestimmung der Punkte ϱ , z genügt bei vorgeschriebenem ε das Intervall

$$(3') \quad 0 \leq \lambda \leq 2\pi.$$

Variables ϑ läßt sich durch die Rotation der beiden Kreisbüschel um die z -Achse zum Ausdruck bringen. Man erkennt, daß dadurch an Stelle jedes Kreises ein Kreisring oder eine Kugel tritt, je nachdem er dem Büschel mit imaginären oder mit reellen Schnittpunkten angehört.

Die Schnittkurven des Ring- mit dem Kugelflächensystem werden durch Wertepaare ε , λ dargestellt. Sie bestehen in einer Schar von Kreislinien, die man sich durch Rotation der den Kreisbüscheln ε , ϑ und λ , ϑ gemeinsamen Schnittpunkten ε , λ , ϑ erzeugt denken kann.

1) Vgl. B. Riemann, Math. Werke. 2. Aufl. Nr. XXIV; oder H. Weber, Part. Differentialgl. der math. Phys. 1. § 44.

Transformation der Grundgleichungen zu Polarkoordinaten.
Integration über ϑ .

Bei Einführung der beiden Geschwindigkeitskomponenten

$$(4) \quad \varphi = \varrho \frac{d\vartheta}{dt}, \quad r = \frac{d\varrho}{dt},$$

in der Kreislinie ϱ , z und längs des Vektors ϱ bekommt man aus (1) durch Transformation mittels (2) und geeignetes Zusammenfassen der Gleichungen

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \varphi}{\partial t} + r \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} + \frac{\varphi}{\varrho} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} + w \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{r \varphi}{\varrho} \\ & - \frac{a}{s} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\varphi}{\varrho^2} \right) = - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\Phi + \Pi), \\ & \frac{\partial r}{\partial t} + r \frac{\partial r}{\partial \varrho} + \frac{\varphi}{\varrho} \frac{\partial r}{\partial \vartheta} + w \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{r^2}{\varrho} \\ & - \frac{a}{s} \left(\frac{\partial^2 r}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial r}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 r}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - \frac{r}{\varrho^2} \right) = - \frac{\partial}{\partial \varrho} (\Phi + \Pi), \\ & \frac{\partial w}{\partial t} + r \frac{\partial w}{\partial \varrho} + \frac{\varphi}{\varrho} \frac{\partial w}{\partial \vartheta} + w \frac{\partial w}{\partial x} \\ & - \frac{a}{s} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial w}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = - \frac{\partial}{\partial x} (\Phi + \Pi). \end{aligned} \right.$$

Aus der Kontinuitätsgleichung (1'') entsteht

$$(5') \quad \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} + \frac{\partial r}{\partial \varrho} + \frac{r}{\varrho} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0.$$

Die quadratischen Glieder bis auf dasjenige mit dem Faktor φ^2 fielen fort, wenn die beiden Geschwindigkeiten r und w , die nach (5') $\partial \varphi / \partial \vartheta$ bestimmen, gleich Null gesetzt werden dürften, also wenn sich die Teilchen auf den Kreislinien ϱ , z bewegten. Das ist jedoch keineswegs der Fall. Im Gegenteil erkennt man beim Beobachten der Oberfläche der schwingenden Flüssigkeit ausgeprägte Bewegungen der Teilchen vom Rohrrinnern her gegen die Wand hin bei Aufwärts- und umgekehrt gerichtete bei Abwärtsbewegungen. Die Art und Stärke der Querströmung ist in jedem Augenblick durch die Gestalt der Oberfläche bedingt, die dadurch Veränderungen unterworfen ist, daß infolge der Reibung ein Teilchen sich um so weniger weit von der Ruhelage entfernt, je näher es der Rohrwand liegt. Der Neigungswinkel der Tangentialebene in einem Punkte ϱ , ϑ , z an die Oberfläche ist mit ϑ veränderlich, und sobald er eine gewisse Größe erreicht hat, wird das an der Stelle liegende Teilchen, analog den Reibungs-

erscheinungen bei Bewegung eines Massenpunktes auf einer Fläche, den Kreis ϱ , z in der Richtung der in der Tangentialebene liegenden Geraden größter Neigung verlassen. Dank der inneren Reibung des Quecksilbers werden die Querströmungen nicht auf die Oberfläche beschränkt bleiben. Indessen werden sie schon in geringer Entfernung von der Oberfläche unmerklich sein, so daß bei einem genügend langen Flüssigkeitsfaden $\varrho = \text{konst.}$, $z = \text{konst.}$ der Einfluß der Teilchen mit nicht verschwindenden Geschwindigkeiten r und w auf die Gesamtzahl der Teilchen vernachlässigt werden darf. Auf einem solchen Ring werden also r und w im Mittel unmerklich sein und ebenso alle anderen Größen, die sich analog verhalten, insbesondere die folgenden Glieder der ersten Gleichung (5)

$$r \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}, \quad w \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \frac{r \varphi}{\varrho}$$

und außerdem noch mit Rücksicht auf die Kontinuitätsgleichung (5'), von deren drei letzten Gliedern dasselbe gilt,

$$\frac{\varphi}{\varrho} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}, \quad \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2}.$$

Es sollen die beiden Flüssigkeitsoberflächen durch die Zeichen a und b unterschieden, z. B. mit ϑ_a und ϑ_b die ϑ -Koordinaten der zwei dem beliebigen Kreise ϱ , z angehörenden Punkte der Oberflächen bezeichnet werden. Multipliziert man die erste Gleichung (5) mit $d\vartheta/(\vartheta_b - \vartheta_a)$ und integriert partiell von ϑ_a bis ϑ_b , so ergibt sich bei Einführung des Mittelwertes

$$(6) \quad \frac{1}{\vartheta_b - \vartheta_a} \int_{\vartheta_a}^{\vartheta_b} \varphi d\vartheta = \varphi_0$$

das Resultat

$$(6') \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} - \frac{a}{s} \left(\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \varrho} - \frac{\varphi_0}{\varrho^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2} \right) = \Theta,$$

wobei Θ die auf die Masseneinheit bezogene, in bezug auf ϑ mittlere Kraft in der Richtung ϑ bezeichnet,

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \Theta &= - \frac{1}{\varrho(\vartheta_b - \vartheta_a)} \int_{\vartheta_a}^{\vartheta_b} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\Phi + \Pi) d\vartheta \\ &= - \frac{1}{\varrho(\vartheta_b - \vartheta_a)} (\Phi_b - \Phi_a + \Pi_b - \Pi_a). \end{aligned} \right.$$

Durch diese Operation ist die Abhängige q_0 , die praktisch allein von Interesse ist, separiert worden. Gelingt es nun noch, den Ausdruck für die Kraft Θ so zu gestalten, daß auch r und w nicht enthält, so kann man q_0 ganz für sich behandeln.

Bestimmung des Ausdruckes für die Kraft Θ . Transformation zu Riemannschen Ringkoordinaten.

Rechnet man die Y -Achse nach oben positiv, so daß gilt

$$\Phi = +gy,$$

und benutzt für II die Definition (1'), so erhält man für Θ zunächst

$$(7) \quad \Theta = -\frac{1}{\varrho(\vartheta_b - \vartheta_a)} \left[g(y_b - y_a) + \frac{1}{s}(p_b - p_a) \right].$$

$y_b - y_a$ ist die doppelte vertikale Elongation des Flüssigkeitsfadens $\varrho = \text{konst.}$, $z = \text{konst.}$, die eine Funktion von ϱ, z oder auch bei anderer Auffassung von ϱ, z und r, w ist. Nimmt man an, daß bei geeigneter Wahl der Länge des Flüssigkeitsringes, so daß die Bedingung

$$(8) \quad \vartheta_b - \vartheta_a = \pi$$

nahezu befriedigt wird, und bei Beschränkung auf hinreichend kleine Amplituden die Flüssigkeitsoberflächen durch die in ihrer Nähe stattfindenden Querströmungen trotz der mit der Entfernung von der Rohrachse variierenden Geschwindigkeit q_0 in jedem Augenblick sehr nahezu in die Gleichgewichtsform gebracht wird, so ist $y_b - y_a$ für alle Ringe ϱ, z gleich und

$$(9) \quad y_b - y_a = 2\eta,$$

unter η die Elongation der Flüssigkeit verstanden. Ohne weiteres ist die Annahme zwar nicht gerechtfertigt, denn da das Quecksilber an der Rohrwand haftet, nehmen die Oberflächen unter der Wirkung der Kapillarität mannigfaltige Formen während der Oszillationen an. Wenn man aber an den von den Menisken passierten Rohrteilen das Anhaften des Quecksilbers verhindert, indem man (vgl. Orientierende Beobachtungen p. 281) etwas konzentrierte Schwefelsäure auf die Oberflächen gießt, so ist Gleichung (9) merklich gültig, auch bei Berücksichtigung der Krümmung der Oberflächen infolge von Kapillarität.

Zwischen η und q_0 besteht eine Relation, der Ausdruck für die Gleichheit des Volumens der in der Zeiteinheit irgend einen Rohrquerschnitt passierenden Masse und des durch die Verschiebung der Oberflächen neu erfüllten Raumes. Bezeichnet man mit Q den Rohrquerschnitt und mit dQ sein Element, worin q_0 als konstant anzusehen ist, so bekommt man mit Rücksicht auf (8) bei kleinen Amplituden

$$(9') \quad \int q_0 dQ = Q \frac{d\eta}{dt},$$

integriert über Q . Durch diese Gleichung, verbunden mit der Anfangsbedingung

$$(10) \quad \eta = 0 \text{ für } t = 0,$$

den Zeitpunkt einer Gleichgewichtslage, ist die Größe η vollständig definiert. Sie soll daher jetzt mittels (9) in (7') eingeführt werden. Man findet

$$(11) \quad \Theta = -\frac{2g}{q(\vartheta_b - \vartheta_a)} \left(\eta + \frac{p_b - p_a}{2gs} \right).$$

In der Wirklichkeit müssen jedoch auch noch infolge des praktisch nicht genau konstanten Rohrquerschnittes Querströmungen auftreten. Mit der Einführung des Mittelwertes q_0 von q wird vorausgesetzt, daß auch sie im Mittel nicht in Betracht kommen. Damit auch die Gleichung (9') für ein nicht überall gleichweites Rohr bestehen bleibt, hat man die Konstante Q der rechten Seite als den mittleren Querschnitt \bar{Q} der bei den Oszillationen von den Flüssigkeitsoberflächen passierten Rohrstücke aufzufassen und unter dQ den mittleren Querschnitt eines Stromfadens, d. h. das Element eines mittleren Querschnittes Q des ganzen Rohres zu verstehen. Die Gleichung lautet dann

$$(12) \quad \bar{Q} \frac{d\eta}{dt} = \int q_0 dQ,$$

integriert über Q .

Durch Einführung der Funktion

$$(12') \quad \psi = \sqrt{q} q_0$$

und Transformation auf die Koordinaten ε, λ mittels (2') gehen die Gleichungen (12) und (6') über in

$$(13) \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{\bar{Q}} \int \frac{\psi}{\sqrt{q}} dQ,$$

$$(14) \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{\varrho^2} \frac{a}{s} \left[\frac{(1 - \varepsilon^2)^2}{4} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2} \right) - \frac{3}{4} \psi \right] = \sqrt{\varrho} \Theta.$$

ϱ hat man jetzt überall als Funktion von ε, λ zu deuten. (14), (11), (13), (10) sind die bei der Lösung des Problems in Betracht kommenden Gleichungen.

In der Bestimmung der im Ausdruck für die Kraft Θ stehenden Gasdruckdifferenz $p_b - p_a$ besteht der thermodynamische Teil der theoretischen Betrachtungen. Um Komplizierungen zu vermeiden, sollen zunächst *adiabatische* Zustandsänderungen vorausgesetzt werden.

2. Lösung des Problems im Falle adiabatischer Zustandsänderungen.

Berechnung der Kraft Θ .

Die Gase sollen zur Zeit des Flüssigkeitsgleichgewichtes die Räume V_a^0 und V_b^0 einnehmen. Dann sind ihre zu den Drucken p_a und p_b gehörenden Volumina V_a und V_b durch die Gleichungen gegeben

$$(15) \quad V_a = V_a^0 + \bar{Q} \eta, \quad V_b = V_b^0 - \bar{Q} \eta,$$

wobei η die durch (13) und (10) definierte vertikale Verschiebung einer Flüssigkeitsoberfläche aus der Ruhelage ist und \bar{Q} den Querschnitt der von den Flüssigkeitsspiegeln passierten Rohrstellen bezeichnet.

Bei Beschränkung auf genügend kleine Amplituden, um $(\bar{Q}/V^0 \eta)^2$ neben 1 vernachlässigen zu dürfen, und bei Benutzung der Abkürzung

$$(15') \quad \mathfrak{B} = \frac{2 V_a^0 V_b^0}{V_a^0 + V_b^0},$$

so daß also \mathfrak{B} ein mittleres Gasvolumen bedeutet, liefert die Adiabatangleichung

$$(15'') \quad p_b - p_a = 2 \kappa p^0 \frac{\bar{Q}}{\mathfrak{B}} \eta,$$

unter p_0 den Anfangsdruck des Gases verstanden.

Wenn man p^0 durch die Höhe H einer Quecksilbersäule mit der Temperatur des oszillierenden Quecksilbers mißt und die Abkürzung

$$(16) \quad 2 I^{(a)} = \frac{2g}{b(\vartheta_b - \vartheta_a)} \left(1 + \kappa H \frac{\bar{Q}}{\mathfrak{B}} \right)$$

benutzt, so findet man aus (11) und (15'') für die Kraft Θ den Ausdruck

$$(16') \quad \Theta = -2 \frac{b}{q} L^{(a)} \eta.$$

Auflösung der Differentialgleichungen. Integration über λ .

Wegen (16') kann die Bewegungsgleichung (14) in der Form geschrieben werden

$$(17) \quad \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{q^2} \frac{a}{s} \left[\frac{(1-\varepsilon^2)^2}{4} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2} \right) - \frac{3}{4} \psi \right] + \frac{b}{\sqrt{q}} \cdot 2 L^{(a)} \eta = 0. \right.$$

Um die Integrale ψ und η der Gleichungen (17) und (13) zu suchen, soll von den Ansätzen ausgegangen werden

$$(18) \quad \psi = \chi e^{qt}, \quad \eta = P e^{qt},$$

worin P und q Konstante sind und χ eine Funktion von ε , λ bezeichnet.

χ ist in seiner Abhängigkeit von λ für das Problem ohne Interesse. Daher soll die durch Einsetzen von (18) in (17) nach Division durch e^{qt} entstehende Gleichung mit Beziehung auf (3') mit $d\lambda/2\pi$ multipliziert und über λ von 0 bis 2π integriert werden.

Weil nach (2') für den speziellen Fall, daß b und c unendlich werden, also das Ringsystem in ein konzentrisches Zylindersystem ausartet, jedes ε verschwindet, ist es für die weitere Behandlung der Gleichungen nützlich, statt ε eine andere Variable

$$(18') \quad \sigma = \frac{\varepsilon}{f}$$

einzuführen und die Konstante f so zu wählen, daß auch im Falle verschwindender Rohrkrümmung σ endlich bleibt. Schreibt man für die Innenwand des Rohres als Parameter den Radius R des mittleren Rohrquerschnittes Q vor, also

$$(18'') \quad \sigma = R,$$

so hat nach (3) f den Wert

$$(18''') \quad f = \frac{1}{c+b}.$$

Setzt man nun ein hinreichend schwach gekrümmtes Rohr voraus, also nach der zweiten Gleichung (3) neben R genügend

große Werte c und b — eine Voraussetzung, die praktisch auf dasselbe hinauskommt wie die oben geforderte Beschränkung auf kleine Amplituden —, so darf man nach (18'') f^2 neben 1 vernachlässigen. Dann erhält man schließlich als Resultat der Integration über λ , weil man innerhalb der eingeführten Annäherung

$$(19) \quad \sigma = r,$$

gleich dem Radius der Kreise des Büschels mit imaginären Schnittpunkten, die konzentrisch gedacht werden dürfen, setzen darf,

$$(20) \quad \frac{d^2 \omega}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\omega}{dr} + m^2 \left(\omega + \frac{2L^{(a)}}{q} P \right) = 0.$$

Dabei ist m^2 die Abkürzung

$$(20') \quad m^2 = -q \frac{s}{a}$$

und ω bezeichnet die Funktion

$$(20'') \quad \omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\chi}{\sqrt{\varphi}} d\lambda,$$

die mit der Geschwindigkeit φ durch die Beziehung verknüpft ist

$$(20''') \quad \omega e^{qt} = \frac{1}{2\pi(\vartheta_b - \vartheta_a)} \int_0^{2\pi} \int_{\vartheta_a}^{\vartheta_b} \varphi d\vartheta d\lambda = \varphi_{00},$$

so daß φ_{00} eine Abkürzung für den Mittelwert von φ in bezug auf ϑ und λ ist.

Um nun auch noch die mit Hilfe der Ansätze (18) aus (13) entstehende Gleichung passend umzugestalten, hat man das Flächendifferential dQ in σ und λ auszudrücken und die Integration über λ auszuführen. Bei Beschränkung auf in f lineare Glieder und Berücksichtigung von (20''), (19) erhält man

$$(21) \quad qP = \frac{2\pi}{Q} \int_0^R \omega r dr.$$

R bezeichnet den Radius des Querschnittes Q .

Bei der Ableitung der Gleichungen (20) und (21) erkennt man, daß die Flüssigkeitsbewegung durch die Rohrkrümmung innerhalb der durch die Vernachlässigung von f^2

neben 1 gegebenen Annäherung nur insofern beeinflußt wird, als Glieder mit λ auftreten, deren Mittelwert in bezug auf λ indessen verschwindet. In der Tat kommt man auf dieselben Gleichungen durch Anwendung der Grundgleichungen (1) und (1'') auf ein *zylindrisches Rohr*.

Um schließlich die Gleichungen (20) und (21) nach ω und P aufzulösen, braucht man nur zu setzen

$$(22) \quad \omega + 2 \frac{L^{(a)}}{q} P = \Omega.$$

Dann erhält man aus (20) für Ω die Besselsche Funktion 0^{ter} Ordnung mit dem Argument $m r$

$$(22') \quad \Omega = J_0(m r).$$

Für P bekommt man aus (21), wenn man (22) und (22') benutzt und unter J_1 die Besselsche Funktion erster Ordnung versteht,

$$(22'') \quad P = \frac{2 q}{q^2 \frac{\bar{Q}}{Q} + 2 L^{(a)}} \frac{J_1(m R)}{m R}.$$

Mit Hilfe von (22') und (22'') folgt nun aus (22)

$$(22''') \quad \omega = J_0(m r) - \frac{4 L^{(a)}}{q^2 \frac{\bar{Q}}{Q} + 2 L^{(a)}} \frac{J_1(m R)}{m R}.$$

Dadurch ist ω bis auf die Konstante q bestimmt. Die Grenzbedingungen (1''') dienen zur vollständigen Bestimmung. Sie drücken aus, daß die die Wände berührenden Teilchen für alle Zeiten ruhen, also

$$(23) \quad \bar{\omega} = 0 \quad \text{für} \quad r = R.$$

Daher bekommt man bei Benutzung der Abkürzung

$$(23') \quad L^{(a)} = \frac{Q}{\bar{Q}} L^{(a)}$$

aus (22''') für q die Bestimmungsgleichung

$$(24) \quad q^2 + 2 L^{(a)} = 4 L^{(a)} \frac{J_1(m R)}{m R J_0(m R)},$$

deren beide physikalisch in Betracht kommenden Wurzeln die Form haben

$$(24') \quad q = -\alpha \pm i\beta.$$

Aus (24'), (22''), (18), (10) erkennt man, daß η bis auf eine unwesentliche Konstante von der Form ist

$$(24'') \quad \eta = e^{-\alpha t} \sin \beta t.$$

η wird also durch eine gedämpfte Sinusschwingung dargestellt mit der Schwingungsdauer, der Dauer einer vollen Schwingung

$$(24''') \quad T = \frac{2\pi}{\beta}.$$

Ebenso kann man nach (20''') die mittlere Geschwindigkeit q_{00} in reeller Form darstellen. Dies ist jedoch für das eigentliche Ziel ohne Interesse.

Es bleibt nun noch die Aufgabe übrig, den Einfluß des Wärmeaustausches zwischen Gas und Umgebung auf den Schwingungsvorgang des Quecksilberringes zu berücksichtigen.

3. Erweiterung der Betrachtungen auf den Fall nichtadiabatischer Änderungen.

Einer wirklich befriedigenden Lösung dieser Aufgabe stellen sich Hindernisse entgegen, die nicht überwunden werden konnten.

Auf drei verschiedene Arten kann ein Wärmetransport zwischen Gas und Umgebung vermittelt werden: durch Leitung, Strahlung und Konvektion. Von vornherein leuchtet ein, daß der auf Strahlung zurückzuführende Anteil im vorliegenden Falle gegenüber dem von der Leitung herrührenden zu vernachlässigen ist. In der Tat wird unten noch auseinandergesetzt werden können, daß der Einfluß der Strahlung neben dem der anderen Wärmefortpflanzungsarten nicht in Betracht kommt.

Die Konvektion hat zweierlei Ursachen. Einerseits tritt sie als direkte Folge der Flüssigkeitsschwingungen auf, unabhängig von der Wärmeleitung. Andererseits werden auch durch die Druckausgleichung der infolge von Wärmeleitung verschieden temperierten Gasschichten Strömungen bedingt. Doch spielen die letzteren neben ersteren wohl nur eine untergeordnete Rolle.

Da sich für die Konvektion ein gesetzmäßiger Ansatz wohl nicht finden läßt, soll von ihrer Berücksichtigung insofern abgesehen werden, als angenommen wird, ihre Wirkung käme

auf eine Vergrößerung der Wärmeleitfähigkeit des Gases hinaus. Dann handelt es sich, wenn die Gasvolumina die Gestalt von Kugeln mit angesetzten Zylindern nach Art der Gefäße G in Fig. 2 haben, und der Zylinderraum neben dem Kugelraum genügend klein ist, um folgendes *thermodynamische Problem*.

Ein in einer starren Kugel befindliches Gasquantum wird durch periodisches Zu- und Abströmen nach dem Gesetz (15)

$$(25) \quad V = V^0 + \bar{Q} \eta$$

gleichförmig dilatiert. Es tauscht dabei mittels Leitung Wärme aus mit der sie einschließenden Glaswand, die ihrerseits auf dieselbe Weise mit der atmosphärischen Luft einen Wärmeaustausch unterhält. Der Gasdruck p ist durch die in Betracht kommenden Konstanten als Funktion der Zeit darzustellen.

a) Bestimmung der Gastemperatur.

Aufstellung der Gleichungen.

Man wird zunächst die Gastemperatur bestimmen, indem man dem Vorgang die durch die Berücksichtigung innerhalb des Gasvolumens vorhandener Wärmequellen und -senken, also im vorliegenden Falle der durch die Dilatation erzeugten Wärmewirkung erweiterte Fouriersche Wärmeleitungsgleichung für isotrope Körper zugrunde legt. Wenn, auf das Gas bezogen, γ_v die spezifische Wärme bei konstantem Volumen, k die Wärmeleitungskonstante, beide in mechanischem Maße ausgedrückt, S die Dichte, δ die Dilatation und τ die absolute Temperatur bezeichnen, so heißt jene Gleichung

$$(26) \quad S \gamma_v \frac{\partial \tau}{\partial t} + p \frac{\partial \delta}{\partial t} = k \Delta \tau.^1)$$

Um sie den besonderen Verhältnissen des Problems anzupassen, hat man die Dilatationsänderung $d\delta$ mittels (25) durch η auszudrücken. $d\delta$ und S sind infolge der ungleichmäßigen Temperierung der Gasschichten vom Orte abhängig, — es soll jedoch davon abgesehen werden, weil diese Wirkung erst in zweiter Linie in Betracht kommt. Bei Beschränkung auf hinreichend kleine Schwingungsweiten und Voraussetzung der An-

1) Vgl. W. Voigt, Thermodynamik 1. p. 347. (228).

wendbarkeit des Boyle-Gay Lussacschen Gesetzes und der für ideale Gase zwischen der Boyleschen Gaskonstanten B und den spezifischen Wärmen γ_p und γ_v bei konstantem Druck und konstantem Volumen in mechanischen Maße bestehenden Relation

$$B = \gamma_p - \gamma_v$$

kommt (26) auf die Form

$$(26') \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} + (\alpha - 1) \tau^0 \frac{\bar{Q}}{V^0} \frac{d\eta}{dt} = \alpha^2 \Delta \tau.$$

Dabei bedeutet α^2 die Temperaturleitfähigkeit

$$(26'') \quad \alpha^2 = \frac{k}{s\gamma_v},$$

die man als Konstante behandeln darf, wenn man im Korrektionsgliede von einer Abhängigkeit der Größen k und γ_v von der Temperatur τ noch absieht.

Für die in (26') vorkommende Größe η hat man den Wert (24'')

$$(26''') \quad \eta = e^{-\alpha t} \sin \beta t.$$

Die Verwendung dieser Gleichung, die nur für den Fall adiabatischer Zustandsänderungen abgeleitet ist, bedingt eine erlaubte Annäherung um so mehr, als das definitive Experiment auch im allgemeinen Falle gedämpfte Sinusschwingungen aufweist (vgl. p. 282).

Für die Temperatur der Wand, die mit τ_w bezeichnet werden soll, hat man die gewöhnliche Fouriersche Wärmeleitungsgleichung, also, wenn α_w^2 für die Wand dieselbe Bedeutung wie α^2 für das Gas hat,

$$(27) \quad \frac{\partial \tau_w}{\partial t} = \alpha_w^2 \Delta \tau_w.$$

Zu (26') und (27) kommen noch die Grenz- und Anfangsbedingungen hinzu. Man bezeichne den Übergangsleitungskoeffizienten zwischen Gas und Wand mit h , den Wärmeleitungskoeffizienten der Kugelwand mit k_w , ihren inneren Radius mit \mathcal{R} , ihren äußeren mit \mathcal{R}_a , den Radiusvektor vom Kugelzentrum zu einem beliebigen Punkte mit r und zeichne die auf eine Grenze sich beziehenden Größen durch einen darüber gesetzten Strich aus.

Wenn die Kugelwanddicke $\Re_a - \Re$ genügend groß ist neben der Dicke derjenigen Wandschicht, die während der Gasdilatationen merkliche Temperaturschwankungen aufweist, und die Kugelwand vor äußeren Wärmeeinflüssen geschützt wird, so darf man der Bedingung für die Grenze $r = \Re_a$ die einfache Form geben

$$(27') \quad \bar{\tau}_w = \tau^0 \quad \text{für} \quad r = \infty.$$

Auch die Bedingungen für die Grenze \Re sollen in vereinfachter Form benutzt werden. Für ruhende Gase, deren Verdünnung nicht unter eine gewisse untere Grenze herabsinkt, ist die äußere Leitfähigkeit h unendlich groß.¹⁾ Im vorliegenden Falle bedingen die Dilatationen allerdings Strömungen der Gasteilchen, so daß der Wert

$$h = \infty$$

nicht ohne weiteres zutrifft. Indessen können die in Angriff genommenen Überlegungen höchstens den Anspruch erheben, eine summarische Berücksichtigung des Wärmeaustausches zu bieten, weil sie ja von der Voraussetzung ausgehen, daß man sich die Wirkung der Konvektion durch eine Vergrößerung der Wärmeleitfähigkeit erzielt denken kann. Aus diesem Grunde soll von der Annahme $h = \infty$ Gebrauch gemacht werden. Dann gilt

$$(27'') \quad \bar{\tau} = \bar{\tau}_w, \quad h \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial r} = h_w \frac{\partial \bar{\tau}_w}{\partial r} \quad \text{für} \quad r = \Re.$$

Ferner soll noch insofern eine Vernachlässigung eintreten, als man überall die durch Berücksichtigung des Wärmeaustausches und der Flüssigkeitsreibung auftretenden quadratischen Korrektionsglieder, also die mit h^2 , α^2 , $h\alpha$ proportionalen Größen, weil sie praktisch nicht in Betracht kommen, neben 1 fortläßt. Dann darf man in (26') statt (26''') einsetzen

$$(27''') \quad \eta = \sin \beta t.$$

Wählt man noch als Anfangsbedingung

$$(27''') \quad \tau = \tau_w = \tau_0 \quad \text{für} \quad t = 0,$$

so wird das vereinfachte Wärmeproblem durch die Gleichungen (26') und (27) bis (27''') zum Ausdruck gebracht.

1) S. M. Smoluchowsky, Wied. Ann. 64. p. 101. 1898.

Transformationen der Gleichungen.

Um es auf eine gewöhnliche Fouriersche Wärmeleitungsaufgabe ohne räumliche Wärmequellen mit der Anfangstemperatur Null zurückzuführen, wendet man die Transformationen an

$$(28) \quad \begin{cases} \tau = \tau^0 - (\kappa - 1) \tau^0 \frac{\bar{Q}}{V^0} \eta + \mathfrak{T}, \\ \tau_w = \tau^0 + \mathfrak{T}_w. \end{cases}$$

Um die Gleichungen der Kugelsymmetrie anzupassen, hat man den Anfangspunkt des Koordinatensystems XYZ in den Kugelmittelpunkt zu verlegen und zu setzen

$$(28') \quad \mathfrak{T} = \frac{U}{r}, \quad \mathfrak{T}_w = \frac{U_w}{r}.$$

Für die Funktionen U und U_w erhält man die Gleichungen

$$(29) \quad \frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}, \quad \frac{\partial U_w}{\partial t} = a_w^2 \frac{\partial^2 U_w}{\partial r^2},$$

$$(29') \quad \begin{cases} \bar{U} - \Re(\kappa - 1) \tau^0 \frac{\bar{Q}}{V^0} \eta = \bar{U}_w \\ k \left(\Re \frac{\partial \bar{U}}{\partial r} - \bar{U} \right) = k_w \left(\Re \frac{\partial \bar{U}_w}{\partial r} - \bar{U}_w \right) \end{cases} \quad \text{für } r = \Re,$$

$$(29'') \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{U_w}{r} = 0,$$

$$(29''') \quad U = U_w = 0 \quad \text{für } t = 0.$$

Durch die Transformation (28') wird außerdem noch, damit die Temperatur im Kugelzentrum nicht unendlich ausfällt, die Nebenbedingung

$$(29''') \quad \bar{U} = 0 \quad \text{für } r = 0$$

erforderlich.

Integration der Gleichungen.

Zwecks Lösung der Aufgabe sieht man von der Anfangsbedingung (29''') vorläufig ganz ab, d. h. man beschränkt sich auf den periodischen Teil der Wärmebewegung, dessen vollständige Integrale $U^{(p)}$ und $U_w^{(p)}$ heißen sollen.

Es soll ausgegangen werden von den partikulären Integralen der Gleichungen (29)

$$e^{-a^2 p^2 t - i p r}, \quad e^{-a_w^2 p_w^2 t - i p_w r},$$

$$p^2 = -2 p^2 i, \quad p = (1 - i) p,$$

$$p_w^2 = -2 p_w^2 i, \quad p_w = (1 - i) p_w,$$

worin p und p_w willkürliche reelle Konstante sind.

Die erste Gleichung (29') liefert die Relationen

$$(30) \quad 2 a^2 p^2 = \beta = 2 a_w^2 p_w^2.$$

Es existieren also zwei mögliche Werte für p sowohl wie für p_w , die sich nur durch die Vorzeichen unterscheiden. Definiert man p und p_w durch die positiven Wurzeln

$$(30') \quad p = + \sqrt{\frac{\beta}{2 a^2}}, \quad p_w = + \sqrt{\frac{\beta}{2 a_w^2}},$$

so bekommen die Integrale mit Rücksicht auf die Nebenbedingungen (29''') und (29'') die Form

$$(30'') \quad \begin{cases} U^{(p)} = C e^{-p r} \sin(\beta t - p r - c) - C e^{+p r} \sin(\beta t + p r - c), \\ U_w^{(p)} = C_w e^{-p_w r} \sin(\beta t - p_w r - c_w). \end{cases}$$

Zur Bestimmung der übrigbleibenden vier willkürlichen Konstanten stehen die beiden Bedingungen (29') zur Verfügung. Setzt man dort die Integrale (30'') ein, so müssen die Koeffizientensummen von $\sin \beta t$ und $\cos \beta t$ verschwinden. So findet man durch Elimination der Glieder mit C_w zwei Gleichungen mit den beiden Unbekannten $C \cos c$, $C \sin c$, wodurch $U^{(p)}$ vollständig bestimmt wird.¹⁾ Durch Elimination der Glieder mit C könnte man ebenso auch $U_w^{(p)}$ finden.

$U^{(p)}$ und $U_w^{(p)}$ sind nur die periodischen Anteile zu U und U_w , weil sie die Anfangsbedingungen (29'') nicht erfüllen. Daher sind die aperiodischen Glieder $U^{(a)}$, $U_w^{(a)}$ so zu wählen, daß sie den Ausgleich der Temperaturverteilung wiedergeben:

$$\begin{aligned} & - U^{(p)} \\ & - U_w^{(p)} \end{aligned} \quad \text{für } t = 0.$$

Man erhält dadurch für $U^{(a)}$ einen Ausdruck, der für $k = 0$ natürlich verschwindet und für $t = \infty$ dasselbe Verhalten zeigt wie die Funktion $e^{-\mu^2 t}$ mit der reellen Konstanten μ .

Auf die Bestimmung dieses Integrales²⁾ soll nicht eingegangen werden, weil unten sich ergeben wird, daß es praktisch nicht in Betracht kommt. Daher sollen $U^{(a)}$ und andere im Verlauf der Rechnung daraus entstehende Formen auch nicht durch die Bezeichnung unterschieden, sondern alle Funk-

1) Vgl. Diss. p. 37 f.

2) Für den speziellen Fall $k_w = \infty$ vgl. H. Weber, l. c. 2. § 44 f.

tionen mit einem analogen Verhalten wie $e^{-\mu^2 t}$ mit $f^{(a)}(t)$ bezeichnet werden.

Mittels (28), (28'), (30'') bekommt man für die Gastemperatur τ den Ausdruck

$$(30'') \left\{ \begin{aligned} \tau &= \tau^0 - (\kappa - 1) \tau^0 \frac{\bar{Q}}{V^0} \eta + C \frac{e^{-\frac{n}{\Re} \tau}}{r} \sin \left(\beta t - n \frac{r}{\Re} - c \right) \\ &\quad - C \frac{e^{+\frac{n}{\Re} \tau}}{r} \sin \left(\beta t - n \frac{r}{\Re} - c \right) + f^{(a)}(t). \end{aligned} \right.$$

Dabei ist gesetzt

$$(31) \quad n = p \Re.$$

b) Berechnung des Gasdruckes p aus der Temperaturverteilung τ .

Die mittlere Gastemperatur.

Zur Bestimmung von p hat man an das Boyle-Gay Lussacsche Gesetz

$$p = B S \tau$$

anzuknüpfen, worin S und τ Funktionen des Ortes und der Zeit sind. Durch Multiplikation mit dk/τ , wo dk das Volumenelement bezeichnet, und Integration über das ganze Gasvolumen V bekommt man

$$(31') \quad p \int \frac{dk}{\tau} = \Re B,$$

unter \Re die Gasmasse verstanden.

Behufs Bestimmung des Integrales $\int dk/\tau$ ist es rechnerisch von Vorteil, auf die Wärmeleitungsgleichung (26') zurückzugehen

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = -(\kappa - 1) \tau_0 \frac{\bar{Q}}{V^0} \frac{d\eta}{dt} + \alpha^2 \Delta \tau.$$

Durch Integration dieser Gleichung nach t und durch Verwandlung des Raumintegrales $\int \Delta \tau dk$ nach dem sogenannten Gausschen Integralsatze in ein Oberflächenintegral bekommt man $\int dk/\tau$. Aus (31') folgt dann wegen $V = V^0 + \bar{Q} \eta$, wenn man Größen der Ordnung $\left(\frac{\bar{Q}}{V^0} \eta\right)^2$ neben 1 wieder fortläßt und unter 0^0 die Oberfläche des Volumens V^0 versteht,

$$(31'') \quad p = p^0 - p^0 \frac{\bar{Q}}{V^0} \kappa \eta + \frac{p^0}{\tau^0} \frac{O^0}{V^0} \alpha^2 \int \frac{\partial \tau}{\partial r} dt.$$

Nebenbei erhält man für die durch

$$(31''') \quad \tau_m = \frac{p}{\Re B} V$$

definierte mittlere Gastemperatur

$$(31''') \quad \tau_m = \tau^0 - (\alpha - 1) \tau^0 \frac{\bar{Q}}{V^0} \eta + \frac{O^0}{V^0} \alpha^3 \int \frac{\partial \tau}{\partial r} dt.$$

Das in (31'') und (31''') stehende Integral ist mittels (30'') zu bestimmen.

Man erhält, wenn man die in den Korrektionsgliedern stehenden Größen O^0 und V^0 durch \Re ausdrückt,

$$(32) \quad \begin{cases} p = p^0 - p^0 \frac{\bar{Q}}{V^0} \left(\alpha - \frac{3}{\beta \Re^2} (\alpha - 1) \alpha^2 \frac{\beta_1}{\Re} \right) \eta \\ - p^0 \frac{\bar{Q}}{V^0} \cdot \frac{3}{\beta^2 \Re^2} (\alpha - 1) \alpha^2 \frac{\beta_2}{\Re} \frac{d\eta}{dt} + f^{(a)}(t), \end{cases}$$

$$(32') \quad \begin{cases} \tau_m = \tau^0 - (\alpha - 1) \tau^0 \frac{\bar{Q}}{V^0} \left(1 - \frac{3}{\beta \Re^2} \alpha^2 \frac{\beta_1}{\Re} \right) \eta \\ - (\alpha - 1) \tau^0 \frac{\bar{Q}}{V^0} \cdot \frac{3}{\beta^2 \Re^2} \alpha^2 \frac{\beta_2}{\Re} \frac{d\eta}{dt} + f^{(a)}(t). \end{cases}$$

Für die Abkürzungen β_1/\Re , β_2/\Re ergeben sich bei Vernachlässigung von $e^{-2\alpha}$, $1/n_w$, n^2/n_w^2 , unter n_w die Größe

$$(32'') \quad n_w = \nu_w \Re$$

verstanden, die Werte

$$(32''') \quad \frac{\beta_1}{\Re} = n \left(1 - \frac{k n}{k_w n_w} \right), \quad \frac{\beta_2}{\Re} = (n - 1) \left(1 - \frac{k n}{k_w n_w} \right).$$

c) Berechnung der Kraft Θ mittels p .

Aus (32) und (11) bekommt man für die auf den Quecksilberring wirkende Kraft, wenn man die Bezeichnung $\mathfrak{B} = 2 V_a^0 V_b^0 / (V_a^0 + V_b^0)$ in (15) benutzt und genügend übereinstimmende Volumina V_a^0 und V_b^0 voraussetzt, um in den Korrektionsgliedern

$$V_a^0 = V_b^0 = \frac{4}{3} \pi \Re^3$$

setzen zu dürfen, bei Benutzung der Abkürzungen

$$(32''') \quad \begin{cases} 2L = \frac{2g}{b(\vartheta_b - \vartheta_a)} \left[1 + H \frac{\bar{Q}}{\mathfrak{B}} \left(\alpha - \frac{3}{\beta \Re^2} (\alpha - 1) \alpha^2 \frac{\beta_1}{\Re} \right) \right], \\ 2l = \frac{2g}{b(\vartheta_b - \vartheta_a)} \cdot H \bar{Q} \frac{9(\alpha - 1) \alpha^2}{4 \pi \Re^3 \beta^2} \frac{\beta_2}{\Re} \end{cases}$$

den Ausdruck

$$(33) \quad \Theta = -2 \frac{b}{q} L \eta - 2 \frac{b}{q} l \frac{d\eta}{dt} + f^{(a)}(t).$$

Vergleicht man hiermit die Kraft (16')

$$\Theta = -2 \frac{b}{q} L^{(a)} \eta$$

für den adiabatischen Vorgang, so erkennt man, daß (33) für $a = 0$, d. h. $k = 0$ in der Tat mit (16') identisch wird. Der Einfluß des Wärmeaustausches auf Θ erscheint in drei Anteile zerlegt. Abgesehen von dem hinzutretenden aperiodischen Gliede tritt ein der Geschwindigkeit $d\eta/dt$ proportionaler und entgegengerichteter Kraftanteil $-2 \frac{b}{q} l \frac{d\eta}{dt}$ auf, während ein dritter Anteil

$$- \frac{b}{q} (2L - 2L^{(a)}) \eta$$

nach (16') und (32''') der Verschiebung η proportional und gleichgerichtet ist.

d) Integration der Bewegungsgleichungen der Flüssigkeit.

Der Kraftausdruck (33) ist in (14) einzusetzen, um die Bewegungsgleichung des Flüssigkeitsringes im allgemeinen Falle zu erhalten. Es ist oben darauf hingewiesen, daß das aperiodische Glied des Ausdrucks mit wachsender Zeit abnimmt und schließlich für $t = \infty$ verschwindet. Je vollständiger der von ihm dargestellte Einfluß des Anfangszustandes der Temperaturverteilung verschwunden ist, also je mehr die Wärmebewegung rein periodisch geworden ist, mit um so größerer Berechtigung darf man das Glied ganz vernachlässigen, also setzen

$$(33') \quad \Theta = -2 \frac{b}{q} L \eta - 2 \frac{b}{q} l \frac{d\eta}{dt}.$$

Dann ist es möglich, genau so wie im Falle adiabatischer Zustandsänderungen, aus den Ansätzen (18)

$$(33'') \quad \psi = \chi e^{qt}, \quad \eta = P e^{qt}$$

die Lösung der Bewegungsgleichungen zu konstruieren, und zwar kann man sie aus der Lösung jenes speziellen Falles

direkt ablesen: man braucht nur $L + lq$ an Stelle von $L^{(a)}$ zu setzen. So findet man aus (24) bei Benutzung der (23') analogen Bezeichnungen

$$(33'') \quad L' = \frac{Q}{Q} L, \quad l' = \frac{Q}{Q} l$$

für q die Gleichung

$$(34) \quad q^2 + 2L' + 2l'q = (4L' + 4l'q) \frac{J_1(mR)}{mR J_0(mR)}.$$

Bei Berücksichtigung des aperiodischen Gliedes in Θ sind jedoch die Ansätze (33'') nicht mehr brauchbar, und zwar ist wegen des Zusammenhanges, den die Gleichung (13) zwischen ψ und η darstellt, auch jeder von beiden für sich allein unmöglich. Dann kann also η nicht mehr durch die Gleichung (24'')

$$(34') \quad \eta = e^{-\alpha t} \sin \beta t$$

dargestellt werden. In praktischen Fällen, wo das Experiment zu entscheiden vermag, daß die Darstellung (34') für gewisse Oszillationen merklich genau richtig ist, muß man daraus den Schluß ziehen, daß die den Oszillationen vorangegangene Zeit genügt hat, um das aperiodische Glied auf eine unmerkliche Größe herabzudrücken. Dann darf man also Gleichung (34) anwenden, deren physikalisch in Betracht kommenden Wurzeln, wie schon aus (34') hervorgeht, von der Form sind

$$(34'') \quad q = -\alpha \pm i\beta.$$

4. Berechnung von α und einiger für die Beurteilung der Assmannschen Methode wichtiger Größen aus den Gleichungen.

Man hat an die Gleichung (34), die in den Abkürzungen L' und l' nach (33'') und (32''') die Größe α enthält, anzuknüpfen. Und zwar sollen $2L'$ und $2l'$ aus (34) berechnet, ihre Werte gleich ihren aus (33'') und (32''') gebildeten Ausdrücken gesetzt und die entstehenden Gleichungen, angewandt auf den Fall sowohl des geschlossenen als des offenen Rohres, zur Bestimmung von α verwertet werden.

Zunächst soll (34) durch Sonderung des reellen vom imaginären Teile in zwei Gleichungen zerlegt werden, wobei in α , l und $1/m = 1/\sqrt{-q \frac{s}{a}}$ quadratische Glieder vernachlässigt werden mögen. Bei Zugrundelegung der halbkonver-

genten Reihen¹⁾ für die Besselschen Funktionen und Benutzung der Bezeichnung

$$\zeta^2 = \frac{a}{2sR^2}$$

ergeben sich die beiden Gleichungen

$$(35) \quad 2L' = \beta^2 \left(1 + 2 \frac{\zeta}{\sqrt{\beta}}\right), \quad 2l' = 2(\alpha - \zeta \sqrt{\beta}).$$

Durch Anwendung der zweiten dieser Gleichungen auf den Fall des offenen Rohres kann man ζ durch β_0 und α_0 , die beiden die Flüssigkeitsbewegung bei offenem Rohr charakterisierenden Konstanten, ausdrücken, und daher kann man statt (35) auch schreiben

$$(35') \quad 2L' = \beta^2 \left(1 + 2 \frac{\alpha_0}{\sqrt{\beta_0 \beta}}\right), \quad 2l' = 2\left(\alpha - \alpha_0 \sqrt{\frac{\beta}{\beta_0}}\right).$$

Damit sind die durch (33''') und (32''') hauptsächlich in Konstanten des Gases und des Apparates ausgedrückten Größen $2L'$ und $2l'$ nur durch Beobachtungsgrößen bestimmt. Schließlich sollen noch die ersten Gleichungen der beiden Paare (35'), (32''') auf das offene Rohr angewandt werden. In (32''') geschieht das dadurch, daß man

$$V_a^0 = V_b^0 = \infty$$

einsetzt. Bei Verwendung der Abkürzungen L'_0, L_0 für die L', L entsprechenden Ausdrücke erhält man

$$(35'') \quad \begin{cases} 2L'_0 = \beta_0^2 \left(1 + 2 \frac{\alpha_0}{\beta_0}\right), \\ 2L_0 = \frac{2g}{b(\vartheta_b - \vartheta_a)}. \end{cases}$$

Durch passende Kombinationen der Gleichungen (35'), (35''), (32''') mit Beziehung auf (33''') bekommt man schließlich die Formeln

$$(35''') \quad \begin{cases} x = \frac{3}{H\bar{Q}} \left(\frac{\beta^2}{\beta_0^2} - 1 \right) \left[1 - 2 \frac{\beta^2}{\beta^2 - \beta_0^2} \frac{\alpha_0}{\beta_0} \left(1 - \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta}} \right) \right] \\ \quad + \frac{3}{\beta \Re^2} (x-1) a^2 \frac{\Im_1}{\Re}. \end{cases}$$

$$(35''') \quad (x-1) a^2 \frac{\Im_2}{\Re} = \frac{1}{H\bar{Q}} \cdot \frac{8\pi \Re^4}{9} \frac{\beta^2}{\beta_0^2} \left(\alpha - \alpha_0 \sqrt{\frac{\beta}{\beta_0}} \right),$$

1) A. Gray and C. P. Mathews, A Treatise on Bessel's Functions, London 1895. p. 40, Gl. 92.

Letztere ist als Beziehung zwischen der Konstanten α^2 der Wärmebewegung und der ihr zu verdankenden Änderung der Konstanten α zu betrachten.

Es soll noch Gleichung (32') benutzt werden, um direkten Aufschluß über den Einfluß des Wärmeaustausches auf die Gastemperatur zu bekommen. Man erkennt, daß bei adiabatischer Dilatation die Temperaturoszillation $\tau_m - \tau^0$, die mit dem Index i versehen werden soll, um auf den idealen Vorgang hinzuweisen, gleich ist

$$(36) \quad (\tau_m - \tau^0)_i = -(\alpha - 1) \tau^0 \frac{\bar{Q}}{8} \eta.$$

Für ihren mit η proportionalen Korrektionsanteil, der zu den Zeiten verschwindender Flüssigkeitsgeschwindigkeiten die Gesamtkorrektion darstellt, erhält man bei Beziehung auf die Einheit, verglichen mit der in (35'') stehenden Wärmekorrektion $\Delta_k \alpha$ zu α

$$(36') \quad \delta_k \tau_m^{(\eta)} = - \frac{\Delta_k \alpha}{\alpha - 1}.$$

Um schließlich die Gleichungen zur praktischen Verwendung fertigzustellen, sollen statt β und β_0 mittels (24'') die Schwingungsdauern T und T_0 eingeführt werden. Benutzt man noch für β_1/\mathfrak{N} und β_2/\mathfrak{N} die Werte (32'') und für n und n_w die aus (31), (32'), (30') folgenden Ausdrücke und versteht unter α_N^2 die zum Normaldruck 76 cm gehörende Größen α^2 , so bekommt man aus (35''') zur Bestimmung von α , wenn man den unkorrigierten Wert in α' und die Reibungs- und Wärmekorrektion dazu in $\Delta_a \alpha$ und $\Delta_k \alpha$ abkürzt,

$$(37) \quad \alpha = \alpha' + \Delta_a \alpha + \Delta_k \alpha,$$

$$(37') \quad \alpha' = \frac{8}{H \bar{Q}} \left(\frac{T_0^2}{T^2} - 1 \right),$$

$$(37'') \quad \Delta_a \alpha = - \frac{8}{H \bar{Q}} \frac{T_0^2}{T^2} \cdot \frac{\alpha_0 T_0}{\pi} \left(1 - \sqrt{\frac{T}{T_0}} \right),$$

$$(37''') \quad \Delta_k \alpha = \frac{3}{2 \mathfrak{N}} \sqrt{\frac{76}{\pi}} (\alpha - 1) \alpha_N \left(1 - \frac{k \alpha_w}{k_w \alpha_N} \sqrt{\frac{H}{76}} \right) \cdot \sqrt{\frac{T}{H}}.$$

Gleichung (35''') erhält die Form

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} & (\alpha - 1) \alpha_N^2 \left(\frac{1}{\alpha_N} \sqrt{\frac{\pi}{76}} \sqrt{\frac{H}{T}} - \frac{1}{\mathfrak{N}} \right) \left(1 - \frac{k \alpha_w}{k_w \alpha_N} \sqrt{\frac{H}{76}} \right) \\ & = \frac{1}{76 \bar{Q}} \frac{8 \pi \mathfrak{N}^4}{9} \cdot \frac{T_0^2}{T^2} \left(\alpha - \alpha_0 \sqrt{\frac{T_0}{T}} \right). \end{aligned} \right.$$

Für die Schwingungsdauern T und T_0 folgen aus (35'), (33'') (32'''), (35'') die Korrekturen

$$(38') \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_a T = -\frac{\alpha_0 \sqrt{T_0} T}{\pi}, \quad \delta_k T = -\frac{H \frac{\bar{Q}}{2} \frac{A_k \pi}{2}}{1 + H \frac{\bar{Q}}{2} \pi}, \\ \delta_a T_0 = -\frac{\alpha_0 T_0}{\pi}. \end{array} \right.$$

Man erkennt, daß sowohl die Flüssigkeitsreibung als auch der Wärmeaustausch vergrößernd auf T einwirken.

Wie die Gleichungen (32'''), (33''), (35'), (35'') erkennen lassen, ist $T < T_0$ und daher wegen (38') die Reibungskorrektur $\delta_a T$, absolut genommen, kleiner als $\delta_a T_0$, weshalb diejenige zu dem in der Formel (37') für π auftretenden Quotienten T_0^2/T^2 negativ ausfällt. So kommt es, daß die Wärmekorrektur zu π positiv, aber die Reibungskorrektur negativ auftritt, obwohl beide in demselben Sinne auf die Flüssigkeitsschwingungen einwirken. Aus dem Umstande, daß die Wärme- und Reibungskorrekturen sich gegenseitig teilweise ausgleichen, ist es zu erklären, daß man bei Anwendung der Formel (37') ohne Rücksicht auf die Korrekturen in besonderen Fällen verhältnismäßig große Werte für π erhalten kann, wie es in der Arbeit von Müller der Fall ist.

II. Experimenteller Teil.

1. Die Einrichtung des Apparates.

Ein annähernd kreisförmig gebogenes Glasrohr r (Fig. 2) mit vertikal auslaufenden Enden wird von einem Holzgestell aus einem horizontal liegenden und einem vertikal stehenden Brette a und b getragen, und zwar ist es auf a mit Gips festge kittet und an b mit Klammern befestigt. Das Ganze ist um eine Achse parallel der Kante s des Brettes a drehbar. Die Rohrenden sind mittels Siegelack in Messingzylinder c eingekittet, die sich oben zu mehrfach durchbohrten ebenen Kreisringscheiben o verbreitern, so daß die ebenso beschaffenen Fassungen der zylindrischen Ansätze zweier kugelförmigen Gefäße G vermittelt Hahn fett luftdicht darauf gesetzt werden können. Verrückungen der Gefäße werden durch in die Bohrlöcher passende Schrauben unmöglich gemacht.

Um die zur Gleichung (27) führenden Voraussetzungen sicherer zu erfüllen, um die Kugelwanddicke neben der Dicke der während der Oszillationen eine merkliche Temperaturschwankung zeigenden Wandschicht genügend groß zu machen, sind die Gefäßwände durch mehrmaliges Auftragen von in Spirituslack angerührtem Gips verstärkt, und um die Gefäße

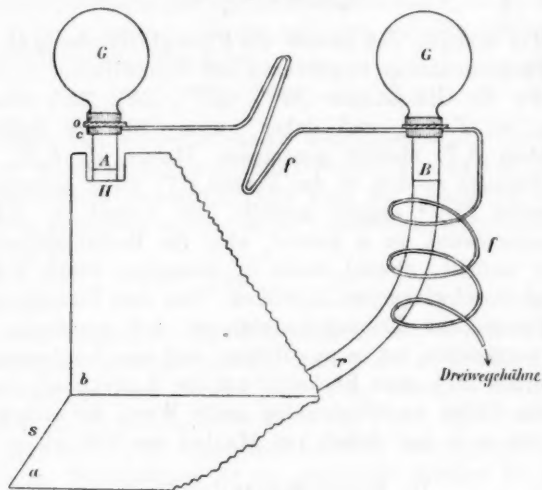


Fig. 2.

vor äußeren Wärmeeinflüssen zu schützen, ist das Ganze mit Watte umwickelt.

Das Rohr r ist, entsprechend der der Theorie zugrunde gelegten Voraussetzung (8), bis zu den Stellen A und B der vertikalen Endstücke mit Quecksilber gefüllt. Um die Räume über den Quecksilberoberflächen evakuieren und mit Gasen füllen zu können, sind in Durchbohrungen der Rohrfassungen, die über die Rohrenden ein wenig hervorragen, unmittelbar unter den Scheiben a ,

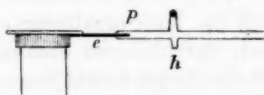


Fig. 3.

zwei kleine enge Messingröhrchen e (Fig. 3) eingelötet, die andererseits mit Siegellack in die Rohre p zweier Glashähne h

eingekittet sind. Die Hähne bilden die Enden einer verzweigten Glasfeder f (Fig. 2), die in ein längs der Drehungsachse des Apparates gelegenes Rohrstück endet. Die besondere Lage dieses Endstückes und die Federgestalt des Rohrteiles f haben den Zweck, die Spannungen, denen die Glasröhren bei einer Drehung des Apparates ausgesetzt sind, zu verringern bez. unschädlich zu machen. Zwei zusammengeblasene Dreiwegehähne stellen schließlich unter Vermittelung von Bleirohren die Verbindung her mit dem Trockenapparat und Gasometer, mit dem Manometer und mit einer Wasserstrahlpumpe, deren Feuchtigkeit durch ein vorgelegtes Trockenrohr am Eindringen in die Gefäße gehindert wird.

Zur Untersuchung der Flüssigkeitssoszillationen wurde ein photographisches Verfahren angewandt. Die das Quecksilber enthaltende Röhre ist auf der einen Seite der einen Niveaustelle A (Fig. 2) mit schwarzem Papier beklebt, das einen vertikalen schmalen Spalt hat. Durch eine Bikonvexlinse L_1 (Fig. 4) wird das Bild des Fadens N einer kleinen

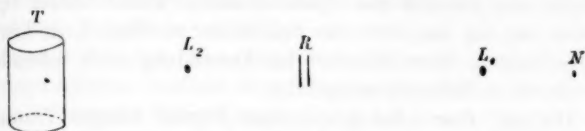


Fig. 4.

Nernstlampe in ihn hineingeworfen. Die oberhalb der Quecksilberoberflächen auffallenden Strahlen gehen durch das Rohr R hindurch, werden jenseits der Röhre durch eine zweite Bikonvexlinse L_2 nochmals konvergent gemacht und, zum Bilde vereinigt, auf eine mit photographischem Papier belegte rotierende Trommel T geworfen. Die so aufgenommenen Photographie geben das Bild des oberhalb der schwingenden Quecksilberoberfläche gelegenen Spaltteiles. Der tiefste bei ruhendem Quecksilber unverdeckte Spaltpunkt, also der die Niveauhöhe der Quecksilberoberfläche angegebende Punkt, wird in den Negativen durch eine helle horizontale Gerade, das Bild eines am Rohr in der rechten Höhe festgeklebten dünnen Drahtes markiert. Die Länge des Spaltteilbildes zwischen dieser Marke und dem zu irgendeiner Zeit tiefsten unverdeckten Spaltpunkt

entspricht der Verschiebung der Flüssigkeitsoberfläche aus der Ruhelage, der Elongation η .

Um aus den Spaltphotogrammen die Dauer der Oszillationen finden zu können, müssen noch Zeitpunkte darauf markiert werden. Zu diesem Zwecke ist an der dem Rohr abgewandten Seite des vertikalen Brettes b (Fig. 2) an der Stelle H unter dem Papierspalt der in einen Stromkreis eingeschaltete magnetische Hammer einer elektrischen Klingel angebracht. Statt des Klöppels der Klingel trägt er einen Kartonstreifen, der, bei geöffnetem Strom den Spalt freilassend, im Augenblick des Stromschlusses angezogen wird und ihn verdeckt. Der Draht des Stromkreises ist am Pendel einer Uhr hinabgelegt und endet in einer Platinspitze, die beim Durchgang des Pendels durch die Ruhelage die Kuppe eines, das andere Ende des Stromkreises bildenden, ein U-förmig gebogenes Röhrchen füllenden Quecksilberfadens berührt. Sobald dies geschieht wird der Stromkreis einen Augenblick geschlossen, der Kartonstreifen von dem Elektromagneten angezogen und dadurch der Spalt verdeckt. Durch dieses Spiel werden aus den Negativen der Spaltbilder vertikale helle Linien ausgeschnitten, deren Abstand bei Anwendung eines Sekundenpendels einer Sekunde entspricht.

Die mit dem photographischen Papier belegte Trommel wird nach Lösen eines Ankers durch ein Uhrwerk in Rotation versetzt, und zwar gestattet ihre Einrichtung die Geschwindigkeit in gewisser Weise zu variieren. Im wesentlichen sind zwei verschiedene Umdrehungsdauern benutzt worden, und zwar betrug sie durchschnittlich 40 Sek. bei geschlossenem Rohr, während sie bei offenem wegen der größeren Schwingungsdauer und der geringeren Dämpfung, welche letztere eine größere Anzahl Schwingungen zu benutzen gestattet, gleich etwa 60 Sek. gewählt wurde.

Zum Messen des Gasdruckes wurde in Ermangelung eines brauchbaren gewöhnlichen Manometers eine von Herrn Prof. Kaufmann vorgeschlagene, auf dem Prinzip der Quecksilberluftpumpe beruhende Einrichtung benutzt.

Da das photographische Verfahren eine Verdunkelung des Zimmers erfordert, wurde behufs Ablesung des Druckes eine Beleuchtung des Manometers nötig. Zwei an einem Stativ

verschiebbar angebrachte Glühlampen, die vom Kathetometer-tische aus regiert werden konnten, erfüllten diesen Zweck, machten indessen eine Vorrichtung erforderlich, die das Manometerrohr vor Strahlung schützte, um eine merkliche Temperatur- und Druckerhöhung des Gases während der Ablesung zu vermeiden.

Orientierende Beobachtungen.

Eine Untersuchung von bei offener Röhre aufgenommenen Photogrammen ergab das überraschende Resultat, daß die Flüssigkeitsschwingungen bei der angegebenen Anordnung des Experimentes durchaus nicht dem theoretischen Ergebnis entsprechen. Sie lassen sich durch die Gleichung

$$\eta = e^{-\alpha t} \sin \beta t$$

bei konstanten Werten α und β nicht darstellen. Vielmehr ergibt sich für die untersuchten Schwingungsweiten, kleiner als 1,5 cm, die im vorliegenden Falle genügend klein sind, um die Vernachlässigungen der Theorie zu rechtfertigen, mit abnehmender Amplitude eine Zunahme von α bis zu einem Maximum, das bei dem benutzten Rohr etwa für $\frac{1}{3}$ cm Schwingungsweite erreicht wird. Von hier an nimmt α innerhalb nur weniger Schwingungen rasch ab bis zu einem konstanten Wert, kleiner als jeder vorhergegangene andere Wert. Ein analoges Verhalten zeigt die Schwingungsdauer T . Sie nimmt anfangs zu, um nahezu mit α zusammen ein Maximum zu erreichen, und dann rasch ab zu einem konstant bleibenden Minimalwert, und zwar unterscheiden sich ihre Extremwerte etwa um $\frac{1}{10}$.

Bei genauer Beobachtung der Quecksilberoberfläche während der Oszillationen erkennt man, daß bei den den Charakter der Unstetigkeit tragenden Schwingungsweiten (etwa $\frac{1}{3}$ cm) fast in einem bestimmten Augenblick eine Art feste Reibung zwischen Quecksilber und Glaswand eintritt, insofern als das Quecksilber an der Wand völlig haften bleibt, so daß nur noch eine Verschiebung der inneren Fäden, nur noch eine Deformation der Oberflächen, deren Randkurven festliegen, möglich ist. Daher muß der merkwürdige Charakter der Schwingungen aus der äußeren Reibung erklärt werden können.

Aus Beobachtungen über den Ausfluß von Quecksilber aus Kapillarröhren hat Warburg¹⁾ den Koeffizienten der äußeren Reibung bestimmt, und zwar gleich unendlich gefunden.

In dem Einfluß der unendlich großen äußeren Reibung auf die Quecksilberoberfläche liegt der Grund für den auf den ersten Blick unerklärlichen Charakter der Schwingungen. Allerdings setzt die aufgestellte Theorie, die Gleichungen (1'''), eine unendliche Reibung voraus; indessen äußert sich deren Einfluß bei Quecksilber anders wie bei einer die Wand benetzenden Flüssigkeit, insofern als bei Oszillationen, z. B. einer Wassersäule, die während der ersten Schwingung die Wand berührenden Teilchen haften bleiben, während sie bei Quecksilber, dank der Kohäsion und Schwere der Teilchen, von der Wand oberhalb der Spiegel abgerissen werden, wodurch eine Überwindung der großen äußeren Reibungskraft an den von den Oberflächen passierten Rohrstücken bei jeder Schwingung von neuem erforderlich wird. Wegen der mit abnehmenden Amplituden abnehmenden lebendigen Kraft der schwingenden Masse ist der dem Loslösen der Flüssigkeitsteilchen von der Wand entgegen wirkende Widerstand um so erfolgreicher, je kleiner die Amplituden sind, bis die Teilchen schließlich ganz daran hängen bleiben und nur noch ein Schwingen der inneren Fäden möglich ist.

Ist die Erklärung richtig, so müssen die Schwierigkeiten fortfallen, sobald man die von den Flüssigkeitsspiegeln passierten Rohrstücke ölt, d. h. die äußere Reibung an jenen Stellen auf irgendeine Weise beseitigt. Auf den Rat des Herrn Geh. R.-R. Voigt hin wurde konzentrierte Schwefelsäure auf die Quecksilberkuppen gegossen, und in der Tat wurden dadurch Schwingungen erzielt, wie sie von der Theorie, Gleichung (34'), verlangt werden, mit einer bedeutend kleineren Dämpfung wie bei den Oszillationen ohne Wandölung mit Verschiebung auch der äußeren Fäden.

Bei den definitiven Beobachtungen nehmen also zwei auf die Quecksilberkuppen gegossene Schwefelsäuremengen an den Schwingungen teil. Die das Spaltbild erzeugenden Strahlen gehen durch sie hindurch.

1 E. Warburg, Pogg. Ann. 140. p. 367. 1870.

Eine dünne Schwefelsäureschicht haftet an einer Wandstelle auch dann noch, wenn sich in dem Rohrteil schon wieder Quecksilber befindet, aber nach beendeten Schwingungen steigt allmählich auch der letzte Rest der Säure nach oben. Eine Verminderung der äußeren Reibung an dem von den Quecksilberoberflächen nicht passierten Rohrteil ist daher nicht zu befürchten. Mit Rücksicht auf die geringe Dicke der Säureschicht durfte die in den Gleichungen auftretende Konstante \bar{Q} , der mittlere Querschnitt des während der Oszillationen gehobenen Quecksilberzylinders, mit dem Rohrquerschnitt der Niveaustellen identifiziert werden.¹⁾

2. Die Bestimmung der Konstanten des Apparates.

Um \bar{Q} zu bestimmen wurde zunächst die Säure und so viel Quecksilber aus dem Rohr herausgenommen, daß die Oberflächen etwa die äußersten Lagen der Kuppen bei den größten benutzten Schwingungsweiten hatten, und die Niveauhöhe des einen Spiegels mittels eines Kathetometers bestimmt. Dann wurde die doppelte der vorher herausgenommenen Masse zugewogen und die dadurch erzielte Höhenänderung des Spiegels festgestellt. Masse, dividiert durch das Produkt aus ihrem spezifischen Gewichte und der doppelten Höhendifferenz gibt den gesuchten Querschnitt. Diese Bestimmung wurde mehrmals, mitunter auch mit kleineren Quecksilbermassen, also für kleinere Schwingungsweiten wiederholt. Die Resultate sind

$$\bar{Q} = 10,308$$

00

04

08

14

00

10

08

 10,306

Die Volumina V_a^0 und V_b^0 ergaben bei beiderlei Gefäßen eine Übereinstimmung bis auf etwa 1 Proz. Sie wurden durch Aus-

1) Vgl. Diss. p. 60 f.

messen ihrer Teile mit Quecksilber bez. destilliertem Wasser unter Berücksichtigung der üblichen Korrekturen und der Abhängigkeit des Volumens des Quecksilberringes von der Temperatur bestimmt, und zwar wurden die Gaszylinder der Rohrenden mit Quecksilber, die kleinen Kugelgefäße sowohl mit Quecksilber wie mit Wasser, und die großen mit Wasser ausgemessen. Die Volumina der kleinen Ansatzstücke e und p (Fig. 3) bis zu den Glashähnen h wurden abgeschätzt, kommen indessen kaum in Betracht. Das durch die Schwefelsäure verdrängte Volumen wurde negativ in Rechnung gesetzt. Um zu vermeiden, daß sich infolge Anziehung von Feuchtigkeit durch die Schwefelsäure ein Fehler in das Volumen einschleicht, wurde die von ihr im Rohr eingenommene Höhe mit einer am Rohr angebrachten Marke bisweilen verglichen.

Die Säure mußte häufig aus dem Rohr herausgenommen und, nachdem die oberen Rohrteile ausgespült waren, durch reine ersetzt werden, weil nicht zu verhindern war, daß sie trübe und undurchsichtig wurde.

Die Höhe der Schwefelsäuremassen im Rohr betrug etwa 1,5 cm.

Das Gewicht der ganzen schwingenden Flüssigkeitsmasse schwankte bei den einzelnen Versuchen nur unmerklich. Es betrug 14 508 g.

3. Über die Beobachtungen und daran anschließende Berechnungen von α .

War nach Beendigung der Aufnahme das photographische Papier geborgen, so wurde häufig die Druckablesung wiederholt. Während sich der Gasdruck in dem Verbindungsrohr von Manometer und Kugelgefäßen Temperaturänderungen halber oft merklich geändert hatte, war er in den Gefäßen selbst, so weit wie erforderlich, stets konstant geblieben.

Für Gasdrucke, etwa gleich einer Atmosphäre, wurden für jedes der untersuchten Gase mehrere Photogramme aufgenommen. Dann wurde der Druck mittels der Wasserstrahlpumpe allmählich erniedrigt, und nach jeder neuen Verdünnung um etwa 6 cm eine Aufnahme gemacht. Es lohnte sich nicht, das Gas beliebig stark zu verdünnen, weil die Schwingungs-

dauer T derjenigen T_0 bei offener Röhre um so näher kommt, und damit, des Auftretens der Differenz $T_0^2 - T^2$ in Gleichung (37) wegen, der Einfluß der Beobachtungsfehler auf α um so größer wird, je kleiner der Gasdruck ist. Es ist mit zwei verschieden großen Gefäßpaaren gearbeitet worden. Vor Beginn und nach Beendigung der Versuche mit einem Gas und einer Gefäßart wurde ein Photogramm bei offener Röhre aufgenommen.

Zwecks Bestimmung der Schwingungsdauer der Flüssigkeitsmasse aus den Photogrammen wurden auf der die Niveauhöhe der Quecksilberoberfläche markierenden Geraden die Zeitpunkte der Durchgänge der Oberflächen durch die Gleichgewichtslage bestimmt. Und zwar diente zur Messung der Bruchteile der Sekunden ein zu einem Fuessschen Registrierapparat gehörender Glasmaßstab, bestehend aus mehreren Parallelen, die von einer Schar konvergierender Geraden und zwar von der mittleren unter einem rechten Winkel geschnitten werden. Von den parallelen Querlinien wurde diejenige ausgesucht, in deren Einheit die Sekundenstrecke des Photogramms aufging. In dieser Einheit wurden die gesuchten Strecken gemessen und mit der Sekundenstrecke verglichen. Nach Aneignung einer gewissen Übung im Ausmessen der Photogramme wurde T bei Luft und Kohlensäure, wofür in der Regel mindestens zwanzig Schwingungen benutzt werden konnten, bis auf etwa $\frac{1}{2}$ Promille genau gefunden. Bei Wasserstoff ist die Genauigkeit vielleicht nicht ganz so groß wie bei den anderen Gasen, weil infolge größerer Dämpfung die Anzahl der brauchbaren Schwingungen kleiner ist. Dagegen ist sie für die Periode T_0 größer.

Zur Bestimmung der Größe α , die nur ein Korrektionsglied gibt, genügte die Messung einer größeren Reihe von Schwingungsweiten mit Hilfe eines in halbe Millimeter geteilten Glasmaßstabes. So wurde α bis etwa auf 2 Proz. genau gefunden.

Zur endgültigen Berechnung der Größe α aus T und α dienen die Gleichungen (37) bis (37''), und zwar wurde die Elimination von k unter Annahme gleicher Wärmeaustauschkonstanten bei beiden Gefäßen durch Kombination der für beide berechneten α' -Werte ermöglicht. Dabei wurde so ver-

fahren, daß die berechneten Zahlen α in ihren Mittelwerten für gleiche Drucke bei beiderlei Gefäßen in möglichst vollständige Übereinstimmung kamen.

Indessen wurde zunächst versucht, für jede der beiden Gefäßgrößen gesondert zum Ziele zu kommen. Mit Hilfe von Gleichung (38) wurde k aus den Beobachtungsgrößen berechnet und durch Einsetzen in (37''') die an α' anzubringende Wärmekorrektion gefunden. Dabei fallen die k -Werte größer aus — für Luft unter Atmosphärendruck z. B. etwa $1\frac{1}{2}$ mal so groß — als die wahren Wärmeleitungskoeffizienten und für die großen Gefäße ergeben sich größere α -Werte als für die kleinen, sodaß erst ein noch bedeutend größeres k als das berechnete α für beide Gefäßarten zur Übereinstimmung bringt. — Es ist versucht worden, die Verhältnisse zu klären durch Fallenlassen der Grenzbedingungen (27''), die verlangen, daß der Koeffizient h der äußeren Leitung unendlich ist. Indessen hat auch die Durchführung des Wärmeaustauschproblems für endliches h mit Berechnung der Konstanten k und h aus der auf beide Gefäßarten angewandten (38) analogen Gleichung zu keinem besseren Resultat geführt.

Auch der Versuch, einen Teil der Wärmeüberführung auf Strahlung zurückzuführen, die in erster Annäherung einen dem Unterschiede zwischen der mittleren Gastemperatur und der Wandtemperatur proportionalen Transport gibt, ist gescheitert. Dieser Wärmeaustausch fällt bei Berechnung des Strahlungskoeffizienten aus einer (38) analogen Gleichung sogar geradezu verschwindend aus, während das aus (38) berechnete k doch wenigstens teilweise die nicht durch Leitung transportierte Wärme korrigiert.

Wenn nun auch die Berechnungen der Konstanten k aus (38) und des Strahlungskoeffizienten aus der entsprechenden Gleichung naturgemäß sehr ungenau sind, es sich dabei nur um eine Schätzung der Größenordnungen handeln kann, so geht aus allem doch hervor, daß neben der Leitung zwar nicht Strahlung, wohl aber Konvektion eine wesentliche Rolle spielt, daß deren Wirkung aber nicht, wie oben angenommen ist, der Wirkung einer Vergrößerung des Wärmeleitungskoeffizienten gleichkommt. In Ermangelung irgendwelcher Gesetze über die Art und Weise der Konvektionswirkung wurden trotz

aller Bedenken die Gleichungen (37) bis (37''') zugrunde gelegt. Von (38) wurde abgesehen. Es darf nicht übersehen werden, daß sich κ nach diesem Verfahren nur ungenau aus den κ' -Werten berechnet. Bei Atmosphärendruck z. B. bedingt eine Änderung der κ' um nur 1 Promille eine Änderung von κ um schon etwa 1 Proz., und mit abnehmendem Drucke wird dieser Einfluß noch größer. Daher kann κ schon durch die zweifellos nicht genau erfüllte Annahme genau gleichen Wärmeaustausches bei beiden Gefäßen möglicherweise wesentlich beeinflusst werden.

Über die Beobachtungszahlen und die daraus berechneten Größen geben die Tabellen p. 288—293 Aufschluß.

4. Die Tabellen.

Jede ihrer Horizontalreihen bezieht sich auf einen bei geschlossenem Rohr angestellten Versuch. Vorangestellt sind die aus Beobachtungen mit offener Röhre zur Zeit vor Beginn bez. nach Beendigung einer Versuchsreihe gefundenen Größen T_0 und α_0 , die mit $T_0^{(v)}$, $\alpha_0^{(v)}$ bez. $T_0^{(n)}$, $\alpha_0^{(n)}$ bezeichnet sind. Ihre Mittelwerte

$$\frac{T_0^{(v)} + T_0^{(n)}}{2}, \quad \frac{\alpha_0^{(v)} + \alpha_0^{(n)}}{2}$$

sind zu den Berechnungen von κ benutzt worden.

Die zu einem jeden Versuch gehörende Zimmertemperatur in Celsiusgraden ist mit u^0 bezeichnet. Die übrigen Bezeichnungen sind schon bisher verwandt worden: es bedeutet H den Gasdruck, \mathfrak{B} das mittlere Gasvolumen $\mathfrak{B} = 2 V_a^0 V_b^0 / (V_a^0 + V_b^0)$, T_0 und T die Schwingungsdauern bei offener und geschlossener Röhre, α_0 und α die entsprechenden Dämpfungsgrößen, und zwar die durch die Schwingungsdauern T_0 und T dividierten natürlichen logarithmischen Dekremente, κ' den unkorrigierten κ -Wert, $\Delta_a \kappa$ bez. $\Delta_k \kappa$ die an κ' anzubringende Reibungs- bez. Wärmekorrektion. Außer κ sind ferner noch für einzelne Versuche die aus den Gleichungen (38'), (37''') und (37), (36') zu berechnenden auf die Einheit bezogenen Korrekturen angegeben, und zwar die Reibungskorrekturen $\delta_a T_0$ und $\delta_a T$ zu T_0 und T , die Wärmekorrekturen $\delta_k T$ zu T , $\delta_k \kappa$ zu κ und $\delta_k^{(n)} \tau_m$ zur

1. Luft.

Die zur Füllung der Gefäße benutzte Luft wurde durch Flaschen mit Kalilauge und konzentrierter Schwefelsäure und durch ein mit Phosphorpentoxyd gefülltes Rohr geleitet.

a) Kleine Gefäße.

Für die Versuche 5 und 6 gilt: $T_0^{(v)} = 1,4680$ $\alpha_0^{(v)} = 0,0420$ $u^0 = 11,4^0$
 $T_0^{(n)} = 1,4677$ $\alpha_0^{(n)} = 0,0414$ $u^0 = 10,0$
 und für die übrigen: $T_0^{(v)} = 1,4673$ $\alpha_0^{(v)} = 0,0436$ $u^0 = 13,4$
 $T_0^{(n)} = 1,4679$ $\alpha_0^{(n)} = 0,0422$ $u^0 = 13,6$

Nr.	H	\mathfrak{B}	u_0	T	α	α'	$-\Delta \alpha \times$	$\Delta \alpha \times$	κ	$-\delta_a T$	$-\delta_k T$	$\delta_k \times$	$-\delta_k^{(n)} \tau_m$	$-\frac{(\tau_m - \tau^0)_k}{\eta}$
1	74,71	867,6	15,5	0,9895	0,0939	1,3520	0,0089	0,0681	1,4112					
2	66	"	3	92	59	45	"	"	97	0,0080	0,0134	0,048	0,16	1,41
3	61	"	3	89	57	68	"	"	60					
4	58	"	1	96	73	40	"	"	32					
5	73,23	869,5	12,1	0,9956	51	24	0,0086	0,0680	18					
6	06	"	11,9	54	46	66	"	680	60					
7	70,26	867,6	14,9	1,0057	52	34	0,0088	697	43					
8	64,04	6	7	0313	51	1,9477	86	724	15					
9	58,48	7	13,8	0538	24	538	85	748	1,4201					
10	52,52	6	14,4	0822	23	450	83	785	1,4152					
11	47,33	6	15,5	1087	06	381	82	823	22	0,0087	0,0129	0,058	0,20	1,40
12	41,63	7	13,8	1385	0,0832	338	80	867	70					
13	35,74	7	6	1740	59	255	78	928	06					

b) Große Gefäße.

b) Große Gefäße.

Für die Versuche 4, 5 und 6 gilt:

Für die übrigen:

$\alpha_0^{(0)} = 0,0414$ $\alpha_0^{(0)} = 10,0^\circ$
 $T_0^{(0)} = 1,4677$ $\alpha_0^{(0)} = 0,0422$ $\alpha_0^{(0)} = 12,2$
 $T_0^{(0)} = 1,4662$ $\alpha_0^{(0)} = 0,0438$ $\alpha_0^{(0)} = ?$
 $T_0^{(0)} = 1,4678$ $\alpha_0^{(0)} = 0,0436$ $\alpha_0^{(0)} = 13,4$
 $-\delta_a T_0^{(0)} = 0,0102$

Nr.	H	g	α^0	α	α'	$-\Delta_a \kappa$	$\Delta_a \kappa$	κ	$-\delta_a T$	$-\delta_k T$	$\delta_k \kappa$	$-\delta_k^{(7)} T_m$	$-\frac{(T_m - \alpha^0)}{\eta}$
1	73,58	2006,7	14,7	0,0662	1,3638	0,0079	0,0365	1,4124					
2	73,58	"	14,7	670	44	"	"	30					
3	73,57	"	14,6	661	53	"	"	39					
4	73,57	2008,6	12,6	649	69	0,0077	0,0363	55					
5	73,40	"	13,1	645	92	"	563	78					
6	73,13	"	11,8	650	38	"	562	23					
7	72,61	2006,7	15,7	665	44	0,0079	570	35					
8	70,14	"	15,7	655	16	79	577	14					
9	64,04	"	15,3	645	68	78	594	1,4084					
10	58,48	"	15,1	641	17	77	614	1,4154					
11	52,61	"	15,1	629	1,3575	76	640	39					
12	46,40	"	13,5	614	44	75	664	33	0,0093	0,0059	0,047	0,16	0,61
13	40,53	"	13,6	609	13	74	707	46					
14	34,75	"	13,5	598	1,3484	73	751	62					
15	29,28	"	13,2	578	48	64	805	1,4089					

Für den Druck $H = 73,6$ ist $k = 0,00028$, $\frac{k}{k_4} = 4,8$.

$H = 46,4$ $k = 0,00023$, $\frac{k}{k_4} = 4,0$.

2. Kohlensäure.

Das Gas wurde durch Auskochen einer Lösung von reinem Natriumbikarbonat in Wasser entwickelt und mittels konzentrierter Schwefelsäure und Phosphorperoxyd getrocknet.

a) Kleine Gefäße.

$$T_0^{(v)} = 1,4700, \quad \alpha_0^{(v)} = 0,0382, \quad w^0 = 20,0^\circ,$$

$$T_0^{(s)} = 1,4706, \quad \alpha_0^{(s)} = 0,0379, \quad w^0 = 20,2^\circ,$$

$$- \delta_a T_0^{(s)} = 0,0089.$$

Nr.	H	g	w^0	T	α	κ'	$-\Delta \alpha \kappa$	$\Delta \alpha \kappa$	κ	$-\delta_a T$	$-\delta_b T$	$\delta_b \kappa$	$-\delta_b^{(v)} T_m$	$-\frac{(T_m - T^0)_b}{\eta}$
1	75,00	868,7	21,1	1,0085	0,0694	1,2650	0,0073	0,0458	1,3035					
2	74,94	864,4	22,4	88	710	65	"	457	49					
3	94	868,7	21,3	81	688	80	"	"	64					
4	98	"	2	80	699	85	"	"	69					
5	89	864,4	22,5	80	692	88	"	"	72					
6	74	868,8	20,3	84	687	1,2700	"	"	84	0,0074	0,0094	0,034	0,15	1,07
7	64	864,4	22,2	90	703	1,2683	"	0,0456	66					
8	57	"	3	92	700	84	"	"	67					
9	66,91	868,5	21,6	1,0387	701	41	0,0072	0,0465	34					
10	60,73	5	4	0,629	680	78	71	472	79					
11	57,91	4	9	0,744	686	1,2700	70	477	1,3107					
12	52,29	6	20,6	1006	670	1,2650	69	486	1,3067					
13	47,26	6	7	1245	684	54	68	497	83	0,0078	0,0080	0,038	0,16	1,07
14	41,72	6	2	1528	673	59	67	511	1,3108					
15	36,51	6	3	1826	650	01	65	529	1,3065					
16	30,61	6	2	2186	633	1,2547	64	556	89					
17	25,44	7	19,2	2524	620	32	62	587	57					
18	19,79	7	3	2930	598	1,2487	61	638	64					

b) Große Gefäße.

$$T_0^{(v)} = 1,4706, \quad \alpha_0^{(v)} = 0,0879, \quad u^0 = 20,2^\circ.$$

$$T_0^{(n)} = 1,4701, \quad \alpha_0^{(n)} = 0,0381, \quad u^0 = 21,0^\circ.$$

Nr.	H	B	u^0	T	α	α'	$-\Delta\alpha$	$\Delta\alpha$	κ	$-\delta_a T$	$-\delta_k T$	$\delta_k \alpha$	$-\delta_k^{(n)} \alpha$	$-\frac{(x_m - x_0)k}{\eta}$
1	76,78	2007,8	20,0	1,1988	0,0526	1,2794	0,0066	0,0378	1,3106					
2	77	8	19,9	95	24	52	66	378	1,3064					
3	74,68	9	5	1,2047	31	72	66	379	85					
4	66	9	3	50	12	55	65	379	69					
5	65	9	3	47	31	78	66	379	91					
6	01	8	20,3	66	11	64	65	378	77					
7	73,87	8	6	75	21	30	65	380	45					
8	80	8	6	73	21	54	65	380	69					
9	68,72	9	19,8	1,2209	15	66	65	381	82					
10	61,17	8	20,2	2427	04	32	64	387	55					
11	54,48	8	4	2627	01	27	63	392	56					
12	53,06	8	2	2669	07	37	62	395	70					
13	46,78	8	6	2870	01	11	62	401	50					
14	40,45	8	7	3083	0,0479	1,2667	61	413	19					
15	34,13	8	4	3298	76	2701	61	429	69	0,0083	0,0037	0,031	0,13	0,46
16	27,46	8	21,7	3543	76	2672	60	453	65					

Für den Druck $H = 75,0$ ist $k = 0,00031$, $\frac{k}{k_i} = 9,0$

$H = 25,0$ $k = 0,00014$, $\frac{k}{k_i} = 4,0$.

3. Wasserstoff.

Einer aus der Fabrik von Elkan in Berlin bezogenen Flasche wurde elektrolytisch hergestellter Wasserstoff entnommen und vor der Füllung der Gefäße durch Kaliumpermanganatlösung, konzentrierte Schwefelsäure und durch ein mit Phosphorperoxyd gefülltes Rohr geleitet.

a) Kleine Gefäße.

Für die Versuche 1, 2, 6, 7 gilt:

$$\begin{aligned} T_0^{(v)} &= 1,4680 & \alpha_0^{(v)} &= 0,0493 & w^0 &= 12,6^0 \\ T_0^{(n)} &= 1,4687 & \alpha_0^{(n)} &= 0,0414 & w^0 &= 14,6 \\ T_0^{(v)} &= 1,4687 & \alpha_0^{(v)} &= 0,0414 & w^0 &= 16,6 \\ T_0^{(n)} &= 1,4686 & \alpha_0^{(n)} &= 0,0431 & w^0 &= 13,1 \end{aligned}$$

Für die übrigen:

Nr.	H	g	w^0	T	α	α'	$-\Delta_n \alpha$	$\Delta_k \alpha$	α	$-\delta_n T$	$-\delta_k T$	$\delta_k \alpha$	$-\delta_k^{(v)} \tau_m$	$(\tau_m - \tau^0)_{\frac{1}{2}}$ η
1	77,12	868,3	11,7	0,9925	0,1592	1,2989	0,0085	0,1279	1,4183	0,0083	0,0255	0,090	0,31	1,41
2	75,61	868,1	11,8	81	"	73	85	296	84					
3	57	867,7	13,4	86	0,1600	60	84	302	78					
4	34	8	12,4	98	0,1596	42	84	299	57					
5	32	8	14,5	92	90	77	84	299	92					
6	02	868,2	12,2	1,0003	70	70	85	302	87					
7	74,94	2	11,8	011	73	46	85	303	64					
8	71,95	867,6	14,5	123	79	29	83	342	88					
9	65,99	7	13,6	370	32	1,2835	81	415	69					
10	60,40	7	13,4	607	11	786	80	492	98					
11	54,52	6	15,4	888	0,1455	657	78	599	78	0,0085	0,0265	0,113	0,36	1,43
12	48,57	6	14,5	1,1179	07	585	76	715	1,4224		0,0270			
13	41,90	6	15,0	1,1545	0,1332	423	74	876	25					

b) Große Gefäße.

$$T_0^{(v)} = 1,4681, \quad \alpha_0^{(v)} = 0,0439, \quad u^0 = 13,0^0$$

$$T_0^{(s)} = 1,4680, \quad \alpha_0^{(s)} = 0,0433, \quad u^0 = 12,6^0,$$

$$-\delta_a T_0^{(s)} = 0,0101.$$

Nr.	H	g	u ⁰	T	α	α'	$-\Delta_a \alpha$	$\Delta_k \alpha$	α	$-\delta_a T$	$-\delta_k T$	$\delta_k \alpha$	$-\delta_k^2 \tau_m$	$(\tau_m - x^0) / \eta$
1	76,74	2006,8	13,8	1,1909	0,0926	1,3185	0,0078	0,1063	1,4170	0,0091	0,0134	0,075	0,25	0,62
2	74	7	14,3	05	32	209	78	65	96					
3	65	8	13,6	13	37	172	78	64	58					
4	64	8	8	09	28	202	78	64	88					
5	63	8	5	10	32	187	78	64	83					
6	59	8	4	13	35	182	78	65	69					
7	72,81	8	3	1,2011	14	206	78	95	1,4223					
8	66,79	8	3	2,194	08	103	76	0,1154	181					
9	61,02	8	5	2,864	0,0872	074	76	216	214					
10	56,39	8	4	2,515	65	2979	74	272	177	0,0093	0,0131	0,090	0,30	0,61
11	50,88	8	3	2,711	42	2902	73	356	185					
12	44,68	8	4	2,903	01	2834	72	451	213					

Für alle untersuchten Drucke ist $k = 0,0011$, $\frac{k}{k_i} = 2,8$.

Gastemperaturänderung $\tau_m - \tau^0$ bei verschwindender Dilatationsgeschwindigkeit ($d\eta/dt = 0$). Auch die Konstante k des Wärmeaustausches, ihr Verhältnis k/k_i zur wirklichen Wärmeleitfähigkeit k_i ¹⁾ und die nach (36) berechnete Temperaturoszillation $(\tau_m - \tau^0)_i/\eta$ bei adiabatischem Vorgange, bezogen auf 1 cm Schwingungsweite, sind mitunter noch angegeben, weil auch sie zur Beurteilung der Methode dienlich sind.

Die zu κ' gehörenden Reibungskorrekturen $\Delta_a \kappa$ sind neben $\Delta_k \kappa$ von nur bescheidener Größe. Indessen beträgt die Änderung $\delta_a T_0$ der Schwingungsdauer T_0 infolge des störenden Einflusses der Reibung immerhin etwa 1 Proz. und diejenige $\delta_a T$ von T mindestens $3/4$ Proz. Jedoch erst ihrem Unterschiede, vervielfacht durch die der Berechnung zugrunde liegende Formel, verdankt man $\Delta_a \kappa$.

Der die Korrektur $\Delta_k \kappa$ oder ihren auf die Einheit bezogenen Wert $\delta_k \kappa$ bedingende Wärmeaustausch wird durch die Temperaturkorrektur $\delta_k^{(\eta)} \tau_m$ zum Ausdruck gebracht, deren Werte aussagen, daß zu den Zeiten verschwindender Dilatationsgeschwindigkeit, wo die Quecksilberoberflächen ihre äußersten Lagen erreicht haben, bei Kohlensäure und Luft $1/8$ bis $1/6$, bei Wasserstoff sogar etwa $1/3$ aller durch Kompression erzeugten Wärme in die Gefäßwände hineingegangen ist. Es kann auffallen, daß neben $\delta_k^{(\eta)} \tau_m$ die Wärmekorrektur $\delta_k T$ zur Schwingungsdauer T nur klein ist und sogar für Wasserstoff bei den kleineren Gefäßen wenig mehr als $2 1/2$ Proz. beträgt. Dazu soll bemerkt werden, daß selbst für den völlig isothermen Vorgang als Korrektur $\delta_k T$ für Wasserstoff unter Atmosphärendruck bei den kleineren Gefäßen nur etwa 8 Proz. berechnet werden. Verglichen mit $\delta_k T$ ist die dadurch hervorgerufene Korrektur $\delta_k \kappa$ zu κ allerdings stark vervielfacht, immerhin aber wesentlich kleiner als die Temperaturkorrektur $\delta_k^{(\eta)} \tau_m$.

Die Zahlen k/k_i für das Verhältnis des Wärmeaustauschkoeffizienten k zur reinen Wärmeleitkonstanten k_i gestatten in gewissem Sinne eine Vergleichung der durch Konvektion und Leitung ermöglichten Wärmetransporte. Berücksicht-

1) Nach A. Winkelmann, Wied. Ann. 44. p. 429. 1891.

sichtigt man, daß die Korrektur $\delta_k x$ mit \sqrt{k} proportional ist, so erkennt man an den Zahlen k/k_i , daß der auf die Konvektion entfallende Anteil an $\delta_k x$ der Größenordnung nach gleich dem Anteil der reinen Wärmeleitung ist. Bei Atmosphärendruck ist ersterer nur für Wasserstoff kleiner als letzterer, während er für Luft etwa ebenso und für Kohlensäure sogar doppelt so groß ist. Wenn er jedoch auch nicht gegen den Anteil der großen Wärmeleitungswirkung des Wasserstoffs anzukommen vermag, absolut genommen ist der Konvektionsanteil an $\delta_k x$ bei Wasserstoff am größten und bei Kohlensäure am kleinsten. Die verschiedene große Beweglichkeit der Teilchen der verschiedenen Gase macht es vielleicht erklärlich, daß die Zahlen k/k_i mit abnehmendem Drucke, bei Kohlensäure am stärksten, bei Wasserstoff innerhalb der untersuchten Drucke anscheinend nur unmerklich abnehmen. In gewissem Zusammenhange damit steht die verschiedene Abhängigkeit von $\delta_k T$ verschiedener Gase vom Drucke.

Die starken Konvektionswirkungen, verglichen mit der nur bescheidenen Temperaturoszillation ($\tau_m - \tau_0$)/ η , die sich auf 1 cm Schwingungsweite bezieht, zeigen, daß die Konvektionsursache nicht die verschiedene Temperatur der Gasschichten sein kann, sondern in den durch die Flüssigkeitsschwingungen, die Gasdilatationen, direkt hervorgerufenen Geschwindigkeiten der Gasteilchen zu suchen ist. Die zur Beobachtung dienenden Schwingungsweiten der Quecksilberoberflächen sind zwar nur klein; um jedoch Oszillationen überhaupt hervorzurufen, ist ein starker Impuls, eine bedeutend größere Anfangsamplitude erforderlich, so daß durch die ersten Schwingungen wohl beträchtliche Strömungen im Gase hervorgerufen werden können.

Es soll noch das Interesse auf die sich aufdrängende Frage gelenkt werden, ob sich auf dem Wege einer weiteren Ausgestaltung des Experimentes eine Verminderung des Wärmeaustausches, eine Zuverlässigkeit der Resultate erreichen läßt. Soviel scheint vorhergesagt werden zu können, daß die beiden am nächsten liegenden Versuche, mit Hilfe noch größerer Gefäße, oder durch Verminderung der Temperaturleitfähigkeit α_w^2 der Gefäßwände zum Ziele zu gelangen, einen wesentlichen Vorteil nicht zu bringen vermögen. Man ist

in der Wahl der Gefäße beschränkt, denn einerseits wird nach (37') der Einfluß der Beobachtungsfehler auf α' um so größer, je größer die Gefäße sind, weil dann T und T^0 um so weniger voneinander abweichen; andererseits nimmt mit abnehmender Gefäßgröße die Dämpfung zu und damit die Anzahl der benutzbaren Schwingungen ab. Aber auch dann, wenn man annimmt, daß mit Rücksicht auf den Einfluß der Beobachtungsfehler noch größere Gasmengen als die benutzten sich als brauchbar erweisen, so lassen sich damit, wie man aus den Formeln und Tabellen schließen muß, wesentlich zuverlässigere Resultate nicht finden. So sind z. B. erst Gefäße von 16 Liter Inhalt im stande, $\Delta_k \alpha$ auf die Hälfte der für die benutzten größeren Gefäße gefundenen Korrektur, also für Luft unter Atmosphärendruck auf etwa 2 Proz. herabzudrücken. Etwa dieselbe Gefäßgröße wäre nötig, um den durch die Berechnung in α eingehenden Fehler auf die Größe des ihn hervorruufenden, in α' enthaltenen Fehlers zu reduzieren. Ferner müßte, um auf dem Wege einer Bekleidung der inneren Gefäßwände die Korrektur $\Delta_k \alpha$ nur auf etwa $\frac{2}{3}$ ihrer gefundenen Beträge zu vermindern, das gewählte Material die Temperaturleitfähigkeit α^2 des Gases haben.

5. Wiederholung einiger Ergebnisse.

Assmanns Methode in derjenigen Anordnung, die von ihrem Erfinder gegeben und von Müller zu Bestimmungen der Größe α angewandt worden ist, leidet unter drei zu unterscheidenden Fehlerquellen, unter dem störenden Einfluß

1. der äußeren Reibung zwischen Quecksilber und Rohrwand an den von den Spiegeln zu passierenden Rohrstellen,
2. der oberflächlichen Reibung am übrigen Rohrteil und der inneren Reibung des Quecksilbers,
3. des Wärmeaustausches zwischen dem Gas und der Gefäßwandung

auf die Oszillationen der Quecksilbermasse.

Der erste Übelstand bedingt unvollständig definierte Verhältnisse, insofern als die Schwingungen sich nicht durch eine Funktion von der Form $e^{-\alpha t} \sin \beta t$ mit konstanten Werten α und β darstellen lassen.

Die Beseitigung dieser Schwierigkeit ist gelungen durch eine Art Ölung der betreffenden Rohrstücke mit konzentrierter Schwefelsäure, die auf die Quecksilberoberflächen gegossen wurde.

Sowohl der zweite wie der dritte Übelstand äußert sich, verglichen mit dem idealen, d. h. völlig reibungslosen und adiabatischen Vorgange, in einer durch Dämpfung hervorgerufenen Vergrößerung der Schwingungsdauer. Indessen wirken Reibung und Wärmetransport auf die Größe α , dank einer Kombination der Schwingungsdauern bei offener und geschlossener Röhre, in entgegengesetztem Sinne ein, erstere vergrößernd, letztere verkleinernd, so daß beide sich teilweise ausgleichen.

Bei Müllers Versuchen mit Luft scheint die Kompensation der beiden Fehler, begünstigt durch eine nur geringe Rohrweite und durch die erste Fehlerquelle, ziemlich vollständig gewesen zu sein. So erklären sich seine verhältnismäßig großen Resultate.¹⁾

Durch Aufstellung einer Theorie der Flüssigkeitsbewegung, die den störenden Einfluß der Reibung, soweit es physikalisch erforderlich ist, berücksichtigt, ist es gelungen, den zweiten Übelstand zu überwinden. Dank der großen Weite des benutzten Rohres fallen die berechneten Reibungskorrekturen nur bescheiden aus.

1) Müllers verhältnismäßig kleine α -Werte für Kohlensäure scheinen ihre Ursache in der Beschaffenheit seines Gases zu haben, denn es muß auffallen, daß mehrere Beobachter für Luft annähernd übereinstimmende, dagegen für Kohlensäure bei nahezu gleichen Temperaturen und Drucken sehr verschiedene Resultate gefunden haben. Vielleicht liegt die Ursache in der mehr oder weniger vollständigen Trockenheit des von den verschiedenen Beobachtern benutzten Gases. Es soll dazu bemerkt werden, daß der Verfasser aus einigen bei Beginn der Arbeit mit nur mangelhaft mittels Chlorcalcium getrockneter Kohlensäure unter Atmosphärendruck angestellten Versuchen bei Benutzung der später für trockenes Gas unter demselben Druck bei denselben Gefäßen berechneten Wärmekorrektur $\Delta\alpha$ nur 1,28 findet, während das gut getrocknete Gas 1,30 liefert. Es ist jedoch kein Gewicht hierauf zu legen, weil es sich nur um vereinzelte Versuche handelt, die ohne Beachtung der nötigen Vorsichtsmaßregeln angestellt wurden. Die Heranziehung der für trockenes Gas gefundenen Korrektur ist auch bedenklich.

Die Berücksichtigung des Wärmeaustausches konnte indessen, weil er sehr bedeutend ist und zum großen Teil auf Konvektion beruht, in Ermangelung mathematischer Gesetze für Konvektionswirkungen nicht zur vollen Befriedigung erledigt werden.

Wenn die Methode zur einwandfreien Bestimmung von α nicht geeignet ist, so liegt die Ursache in dem überaus großen Wärmeaustausch, und zwar namentlich an der Wärmefortpflanzung durch Konvektion.

Der Verfasser schuldet herzlichen Dank Hrn. Geheimrat Prof. Dr. W. Voigt, der ihn zur vorliegenden Arbeit angeregt, ihm seine eigenen Apparate gütigst zur Verfügung gestellt und ihn bei der Ausführung in nie ermüdendem Interesse jederzeit freundlichst unterstützt hat. Auch Hrn. Prof. Dr. W. Kaufmann ist er für die bereitwillige Förderung der Arbeit zu großem Dank verpflichtet.

Göttingen, Physik. Inst. der Univ.

(Eingegangen 5. August 1905.)

**3. Zur Theorie der relativen Bewegung
und des Foucaultschen Pendelversuches;
von A. Denizot.¹⁾**

Die Theorie des Foucaultschen Pendelversuches²⁾ hat zuerst Binet³⁾ auf gewisse Differentialgleichungen zurückgeführt, die aus allgemeineren, von Poisson⁴⁾ entwickelten Gleichungen hervorgehen und außer der Schwere und Fadentension noch die sogenannte zusammengesetzte Zentrifugalkraft von Coriolis enthalten; mit anderen Worten, das zuerst von Foucault ausgesprochene Sinusgesetz wird theoretisch als eine Folge dieser fingierten Kraft angesehen. Mit der von Binet gegebenen, auf Prinzipien der Dynamik beruhenden Beweisführung waren zwar Liouville⁵⁾ und Poincot⁶⁾ nicht einverstanden, ihren anderen, auf geometrischer Anschauung basierenden Beweis haben sie jedoch nirgends ausführlicher mitgeteilt. Seitdem sind die von Binet angewandten Differentialgleichungen allgemein als Grundlage für die Theorie des Foucaultschen Pendelversuches angenommen und der Ausgangspunkt vieler theoretischer Arbeiten in dieser Richtung geworden.

Nun zeigt einerseits eine allgemeine Theorie der Coriolis'schen Kraft, auf welche doch das von Foucault beobachtete Phänomen zurückgeführt wird, daß im vorliegenden Falle mit der Änderung der Bewegungsrichtung auch der Richtungssinn der Coriolis'schen Kraft geändert wird und daher die Erscheinung einer fortwährenden Drehung der Bewegungsebene des Pendels in ein und demselben Sinne so nicht erklärt werden kann. Andererseits repräsentieren die von Binet gerade ver-

1) Vgl. A. Denizot, Physik. Zeitschr. 6. p. 342. 1905.

2) L. Foucault, Compt. rend. 32. p. 135. 1851.

3) J. Binet, Compt. rend. 32. p. 157 u. 197. 1851.

4) S. D. Poisson, Journ. de l'École Polyt. 26. p. 15. 1838.

5) J. Liouville, Compt. rend. 32. p. 159. 1851.

6) L. Poincot, Compt. rend. 32. p. 206. 1851.

nachlässigten Glieder gewisse Zentrifugalkräfte, die imstande sind, eine solche Drehung des sich bewegenden Körpers um eine gewisse Achse zu deuten und somit das von Foucault ausgesprochene Gesetz darzustellen. Auf eine Unzulänglichkeit der Binetschen Gleichungen infolge der weggelassenen Glieder hat übrigens O. Röthig¹⁾ bereits aufmerksam gemacht; indes sind diese unberücksichtigten Glieder bis jetzt niemals Gegenstand eines eingehenderen Studiums gewesen.

In dieser Abhandlung wird zunächst eine allgemeine Theorie der relativen Bewegung gegeben, in welcher das Theorem von Clairaut und Coriolis in einer meines Wissens in der Literatur noch nicht bekannten Art und Weise interpretiert wird; hierbei wird die fingierte „*force d'entraînement*“ in drei einzelne fingierte Kräfte zerlegt. Alsdann folgt eine Anwendung der allgemeinen Sätze auf die Bewegung eines Körpers an der Oberfläche der rotierenden Erde. Es wird gezeigt, daß man einen Teil der „*force d'entraînement*“ zusammen mit der Erdattraktion als die auf den Körper an dem betreffenden Orte wirkende Schwere auffassen und den anderen Teil der fingierten Hilfskraft zur theoretischen Erklärung der Drehung der Bewegungsebene eines Pendels sowie der vielfach umstrittenen südlichen Abweichung eines frei fallenden Körpers benutzen kann; gleichzeitig werden Gründe angegeben, warum die zweite, durch das Theorem von Clairaut und Coriolis gegebene Hilfskraft (*la force centrifuge composée*) die Drehung eines Pendels nicht bewirken kann.

I. Allgemeine Theorie der relativen Bewegung.

Es werde ein im Raume absolut festes $O'(x'y'z')$ und ein bewegliches Koordinatensystem $O(xyz)$ vorausgesetzt, und es soll die Bewegung eines Körpers in dem durch das bewegliche Koordinatensystem gegebenen Raume betrachtet werden. Alsdann lehrt das Theorem von Clairaut und Coriolis²⁾, daß man die relative Bewegung eines Massensystems ebenso

1) O. Röthig, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 24. p. 153. 1879.

2) Clairaut, Histoire de l'Acad. Roy. d. Sciences, Mém. de Math. et de Phys. Paris p. 1. 1742; Coriolis, Journal de l'École Polytechnique 21. p. 268. 1832; 24. p. 142. 1835; J. Bertrand, ibid 32. p. 149. 1848.

wie die absolute behandeln kann, wenn man zu den auf jeden Massenpunkt tatsächlich wirkenden Kräften noch gewisse fingierte Hilfskräfte hinzufügt, nämlich 1. eine gleiche und derjenigen entgegengesetzte Kraft, welche den Massenpunkt mit dem beweglichen Koordinatensystem fest verbinden würde (*la force d'entraînement*) und 2. die zusammengesetzte Zentrifugalkraft (*la force centrifuge composée*).

§ 1. Zu irgend einer Zeit t sei nun die Lage eines Massenpunktes in bezug auf das feste und bewegliche rechtwinklige Koordinatensystem durch folgende Transformationsgleichungen gegeben:

$$(1) \quad \begin{cases} x' = x_0 + ax + by + cz, \\ y' = y_0 + a'x + b'y + c'z, \\ z' = z_0 + a''x + b''y + c''z. \end{cases}$$

Die Koordinaten x_0, y_0, z_0 des Anfangspunktes O des beweglichen Koordinatensystems, sowie die Cosinus a, b, c, \dots werden als bekannte Funktionen der Zeit t vorausgesetzt.

Unter Berücksichtigung der bekannten Relationen zwischen den neun Cosinus der Transformationsgleichungen (1) sowie der Substitutionen:

$$(2) \quad \begin{cases} c \frac{db}{dt} + c' \frac{db'}{dt} + c'' \frac{db''}{dt} = -b \frac{dc}{dt} - b' \frac{dc'}{dt} - b'' \frac{dc''}{dt} = p, \\ a \frac{dc}{dt} + a' \frac{dc'}{dt} + a'' \frac{dc''}{dt} = -c \frac{da}{dt} - c' \frac{da'}{dt} - c'' \frac{da''}{dt} = q, \\ b \frac{da}{dt} + b' \frac{da'}{dt} + b'' \frac{da''}{dt} = -a \frac{db}{dt} - a' \frac{db'}{dt} - a'' \frac{db''}{dt} = r \end{cases}$$

folgen, wie bekannt, die Relationen:

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{da}{dt} = rb - qc, & \frac{db}{dt} = pc - ra, & \frac{dc}{dt} = qa - pb, \\ \frac{da'}{dt} = rb' - qc', & \frac{db'}{dt} = pc' - ra', & \frac{dc'}{dt} = qa' - pb', \\ \frac{da''}{dt} = rb'' - qc'', & \frac{db''}{dt} = pc'' - ra'', & \frac{dc''}{dt} = qa'' - pb''. \end{cases}$$

§ 2. Die Ableitung der Bewegungsgleichungen kann in einfacher Weise mittels der Lagrangeschen Gleichungen geschehen.

Ist die lebendige Kraft der Masseneinheit

$$(4) \quad T = \frac{1}{2}(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2),$$

so gilt für die x -Koordinate die Gleichung

$$(5) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{dx} \right) - \frac{dT}{dx} - X = 0,$$

wo X die von außen wirkende Kraft in Richtung der x -Koordinate bedeutet.

Werden die Transformationsgleichungen (1) nach der Zeit t differenziert und wird dann der Ausdruck (4) gebildet, so erhält man:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} 2T &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + \left(\frac{dx_0}{dt} + x \frac{da}{dt} + y \frac{db}{dt} + z \frac{dc}{dt} \right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{dy_0}{dt} + x \frac{da'}{dt} + y \frac{db'}{dt} + z \frac{dc'}{dt} \right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{dz_0}{dt} + x \frac{da''}{dt} + y \frac{db''}{dt} + z \frac{dc''}{dt} \right)^2 \\ &\quad + 2(a \dot{x} + b \dot{y} + c \dot{z}) \left(\frac{dx_0}{dt} + x \frac{da}{dt} + y \frac{db}{dt} + z \frac{dc}{dt} \right) \\ &\quad + 2(a' \dot{x} + b' \dot{y} + c' \dot{z}) \left(\frac{dy_0}{dt} + x \frac{da'}{dt} + y \frac{db'}{dt} + z \frac{dc'}{dt} \right) \\ &\quad + 2(a'' \dot{x} + b'' \dot{y} + c'' \dot{z}) \left(\frac{dz_0}{dt} + x \frac{da''}{dt} + y \frac{db''}{dt} + z \frac{dc''}{dt} \right). \end{aligned} \right.$$

Unter Benutzung der Beziehungen (2) und (3) folgt aus diesem Ausdruck:

$$(7) \quad \frac{dT}{dx} = \dot{x} - r y + q z + a \frac{dx_0}{dt} + a' \frac{dy_0}{dt} + a'' \frac{dz_0}{dt}$$

und

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dT}{dx} &= (q^2 + r^2)x - p q y - p r z + r \dot{y} - q \dot{z} \\ &\quad + \frac{da}{dt} \frac{dx_0}{dt} + \frac{da'}{dt} \frac{dy_0}{dt} + \frac{da''}{dt} \frac{dz_0}{dt}. \end{aligned} \right.$$

Indem nun (7) und (8) zu Gleichung (5) vereinigt werden, ergeben sich die Bewegungsgleichungen:

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \ddot{x} &= X - \left(a \frac{d^2 x_0}{dt^2} + a' \frac{d^2 y_0}{dt^2} + a'' \frac{d^2 z_0}{dt^2} \right) \\ &\quad + \{(q^2 + r^2)x - p q y - p r z\} - \left(z \frac{dq}{dt} - y \frac{dr}{dt} \right) \\ &\quad - 2(q \dot{z} - r \dot{y}); \end{aligned} \right.$$

analog und durch zyklische Vertauschung der Größen p, q, r sowie x, y, z erhält man die entsprechenden Gleichungen

für die Richtungen y und z . Die drei ersten Klammern auf der rechten Seite repräsentieren die erste Zusatzkraft in dem Theorem von Coriolis und das letzte Glied ist der Ausdruck für die zweite Zusatzkraft.

Im folgenden werde die Bedeutung der einzelnen, auf der rechten Seite der Gleichungen (9) stehenden Glieder näher erörtert.

§ 3. Zunächst können in den Ausdrücken

$$(10) \quad \begin{cases} X_0 = - \left(a \frac{d^2 x_0}{dt^2} + a' \frac{d^2 y_0}{dt^2} + a'' \frac{d^2 z_0}{dt^2} \right), \\ Y_0 = - \left(b \frac{d^2 x_0}{dt^2} + b' \frac{d^2 y_0}{dt^2} + b'' \frac{d^2 z_0}{dt^2} \right), \\ Z_0 = - \left(c \frac{d^2 x_0}{dt^2} + c' \frac{d^2 y_0}{dt^2} + c'' \frac{d^2 z_0}{dt^2} \right) \end{cases}$$

die Glieder $d^2 x_0/dt^2$, $d^2 y_0/dt^2$, $d^2 z_0/dt^2$ als Kräfte aufgefaßt werden, die auf die im Koordinatenanfang O befindliche Masseneinheit wirken, die Ausdrücke (10) sind dann die Projektionen dieser fingierten Kräfte auf die beweglichen Achsen. Es sollen daher die Ausdrücke (10) als *die auf den Koordinatenanfang wirkende Kraft* bezeichnet werden.

§ 4. Um die Bedeutung der weiteren Glieder in (9) zu erkennen, vergegenwärtige man sich zunächst, daß

$$(11) \quad \begin{cases} u = qz - ry, \\ v = rx - pz, \\ w = py - qx \end{cases}$$

die Komponenten der Drehungsgeschwindigkeit des mit dem beweglichen Koordinatensystem fest verbunden gedachten Punktes x, y, z um die *instantane*, durch den Koordinatenanfang O gehende *Achse* sind. Die Größen p, q, r sind also die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit, mit der sich das bewegliche Koordinatensystem um die instantane Achse dreht; die Winkelgeschwindigkeit selbst ist

$$(12) \quad \omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2},$$

wobei die Quadratwurzel positiv zu nehmen ist, wenn der Richtungssinn der Drehung positiv ist. Die Größen

$$\frac{p}{\omega}, \quad \frac{q}{\omega}, \quad \frac{r}{\omega}$$

sind die Richtungskosinusse der instantanen Achse zur Zeit t . Wird auf der instantanen Achse eine Strecke $\overline{OK} = \omega$ abgetragen und sind deren Projektionen auf die beweglichen Achsen OX, OY, OZ bez. gleich p, q, r , so wird durch die Strecke \overline{OK} die Achse der augenblicklichen Rotation repräsentiert. Wird der Betrachtung ein Koordinatensystem, dessen $+x$ -Achse nach vorn, $+y$ -Achse nach rechts und $+z$ -Achse nach oben geht, zugrunde gelegt, so wird einem Beobachter, der sich in der $+z$ -Achse mit den Fußspitzen im Koordinatenanfang, mit dem Gesicht nach vorn befindet, der positive Drehungssinn in Richtung von rechts nach links erscheinen.

§ 5. Die Bedeutung der in der zweiten Klammer stehenden Ausdrücke in den Gleichungen (9) wird erkannt, wenn der Ausdruck für die lebendige Kraft der Rotationsbewegung des Punktes mit der Masse $m = 1$ um die instantane Achse aufgestellt wird. Mit Berücksichtigung von (11) erhält man:

$$(13) \quad \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) = \frac{1}{2}\{(qz - ry)^2 + (rx - pz)^2 + (py - qx)^2\}.$$

Wird diese Betrachtung auf ein starres Massensystem ausgedehnt, so ist die Rotationsenergie um die instantane Achse gleich $\frac{1}{2}J\omega^2$, wo J das *Trägheitsmoment* der rotierenden Masse in bezug auf die instantane Achse ist und *das instantane Trägheitsmoment* heißen möge. Auch für einen einzigen Punkt sei daher für (13) geschrieben:

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2}J\omega^2 &= \frac{1}{2}p^2(y^2 + z^2) + \frac{1}{2}q^2(x^2 + z^2) + \frac{1}{2}r^2(y^2 + x^2) \\ &\quad - qryz - prxz - pqxy. \end{aligned} \right.$$

Werden in bezug auf diesen Ausdruck die partiellen Differentialquotienten nach den einzelnen Koordinaten gebildet, so folgt:

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} X_r &= \frac{1}{2}\omega^2 \frac{\partial J}{\partial x} = (q^2 + r^2)x - pqy - prz, \\ Y_r &= \frac{1}{2}\omega^2 \frac{\partial J}{\partial y} = (p^2 + r^2)y - qrz - pqx, \\ Z_r &= \frac{1}{2}\omega^2 \frac{\partial J}{\partial z} = (p^2 + q^2)z - prx - qry. \end{aligned} \right.$$

Die rechts stehenden Ausdrücke sind dieselben, die in der zweiten Klammer der Gleichungen (9) vorkommen, und sind, wie ohne weiteres zu ersehen, die Komponenten der Zentrifugalkraft, welche durch die relative Drehung des Punktes um

die instantane Achse erzeugt wird. Die durch (15) repräsentierte Kraft möge daher die *instantane Zentrifugalkraft* der sich bewegenden Masse heißen.

Um den Sinn dieser (scheinbaren) Drehung festzustellen, möge zu irgend einer Zeit der Anfangspunkt des beweglichen Koordinatensystems mit dem des festen zusammenfallen und außerdem eine konstante Winkelgeschwindigkeit des beweglichen Koordinatensystems um die instantane Achse herrschen, so bleibt von der „*force d'entraînement*“ nur der durch (15) gegebene Teil übrig. Aus der Definition der letzteren folgt nun, daß die scheinbare Drehung des Massenpunktes gerade in dem entgegengesetzten Richtungssinn der absoluten Drehung des beweglichen Koordinatensystems um die instantane Achse stattfindet.

Die Ausdrücke (15) können ohne weiteres auf ein starres System von Massenpunkten ausgedehnt werden. Da durch

$$(16) \quad \begin{cases} \xi \sum m = \sum m x, \\ \eta \sum m = \sum m y, \\ \zeta \sum m = \sum m z \end{cases}$$

die Lage ξ, η, ζ des Massenmittelpunktes des Systems definiert wird, so folgt, daß die Summe der partiellen Differentialquotienten der instantanen Rotationsenergie der gesamten Masse in bezug auf die Koordinaten der einzelnen Massenpunkte gleich den partiellen Differentialquotienten der Rotationsenergie des Massenmittelpunktes nach den einzelnen Koordinaten des letzteren ist.

§ 6. Im Anschluß hieran sollen noch zwei Beziehungen aufgestellt werden, von denen später Gebrauch gemacht wird. Werden die Gleichungen (15) der Reihe nach mit p, q, r multipliziert, so folgt nach Addition die Beziehung

$$(17) \quad p X_f + q Y_f + r Z_f = 0,$$

d. h. — was auch ohne weiteres selbstverständlich ist — daß die instantane Zentrifugalkraft senkrecht auf der instantanen Achse steht.

Außerdem werde gesetzt:

$$(18) \quad dJ = \frac{\partial J}{\partial x} dx + \frac{\partial J}{\partial y} dy + \frac{\partial J}{\partial z} dz.$$

Dieser Ausdruck stellt die Änderung des instantanen Trägheitsmomentes dar, während welcher die Richtung der instantanen Achse konstant bleibt. Werden alle Glieder der Gleichung (18) mit $\frac{1}{2} \omega^2$ multipliziert, so folgt, da nach (15) $\frac{1}{2} \omega^2 (\partial J / \partial x)$, ... die Komponenten der instantanen Zentrifugalkraft des Massenpunktes x, y, z sind, für ein System von Massenpunkten:

Die Abnahme der instantanen Rotationsenergie (bei konstanter Winkelgeschwindigkeit) ist gleich der Arbeit der Zentrifugalkräfte der einzelnen Massenpunkte.

§ 7. Werden die Ausdrücke

$$(19) \quad \frac{p}{\omega} = \sqrt{J} \cdot \xi, \quad \frac{q}{\omega} = \sqrt{J} \cdot \eta, \quad \frac{r}{\omega} = \sqrt{J} \cdot \zeta,$$

sowie die Abkürzungen

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma m(y^2 + z^2) = A, \quad \Sigma m(x^2 + z^2) = B, \quad \Sigma m(x^2 + y^2) = C, \\ \Sigma m y z = D, \quad \Sigma m x z = E, \quad \Sigma m x y = F \end{array} \right.$$

in die entsprechende, für ein Massensystem geltende Gleichung (14) eingesetzt, so lautet die Gleichung des der Zeit t entsprechenden instantanen Trägheitsellipsoides (mit dem Mittelpunkt O):

$$(21) \quad A \xi^2 + B \eta^2 + C \zeta^2 - 2 D \eta \zeta - 2 E \xi \zeta - 2 F \xi \eta = 1.$$

Die Koeffizienten A, B, C, \dots sind keine Konstanten, da die Lage der Massenpunkte x, y, z mit der Zeit veränderlich ist. Jedem Zeitpunkt entspricht ein Trägheitsellipsoid. Man kann sich nun in jedem Zeitpunkt eine dem veränderlichen Ellipsoid entsprechende veränderliche Form der Masse zugeordnet denken, durch deren relative Drehung um die instantane Achse die Energie $\frac{1}{2} J \omega^2$ erzeugt wird.

§ 8. Der letzte Teil der ersten Zusatzkraft von Coriolis in den Gleichungen (9)

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_t = - \left(z \frac{dq}{dt} - y \frac{dr}{dt} \right), \\ Y_t = - \left(x \frac{dr}{dt} - z \frac{dp}{dt} \right), \\ Z_t = - \left(y \frac{dp}{dt} - x \frac{dq}{dt} \right) \end{array} \right.$$

steht in engem Zusammenhang mit der vom radius vector beschriebenen Kurve bez. Fläche, und die durch (22) gegebene

fingierte Kraft möge die *instantane Tangentialkraft* heißen. Die Ausdrücke (22) sind ohne weiteres auf ein System von diskreten Massenpunkten übertragbar und beziehen sich dann auf den Massenmittelpunkt des Systems. Dreht sich das bewegliche Koordinatensystem um die instantane Achse mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit, so fällt diese Kraft fort.

§ 9. Die in der letzten Klammer auf der rechten Seite in (9) stehenden Ausdrücke

$$(23) \quad \begin{cases} X_c = -2(q\dot{z} - r\dot{y}), \\ Y_c = -2(r\dot{x} - p\dot{z}), \\ Z_c = -2(p\dot{y} - q\dot{x}) \end{cases}$$

sind die Komponenten der *zusammengesetzten Zentrifugalkraft*, die kurz die *Coriolissche Kraft* genannt werden soll.

Nach § 4 sind p, q, r die Streckenkoordinaten der die instantane Rotation repräsentierenden Achse $OK = \omega$, und denkt man sich noch die relative Geschwindigkeit $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ durch Strecken dargestellt, so sind die Ausdrücke (23) die Projektionen des doppelten Flächeninhaltes des von ω und der relativen Geschwindigkeit c gebildeten Parallelogramms; die zusammengesetzte Zentrifugalkraft ist demnach gleich

$$(24) \quad -2\omega c \sin \vartheta,$$

wo ϑ der Winkel zwischen c und der instantanen Rotationsachse ist. Werden die Ausdrücke (23) einerseits mit $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, andererseits mit p, q, r multipliziert und die einzelnen Ergebnisse addiert, so sind die betreffenden Summen gleich Null; d. h. die Richtung der Coriolisschen Kraft steht senkrecht zur Winkelgeschwindigkeit und zur relativen Geschwindigkeit, entgegengesetzt der Richtung, in welcher die Rotation das bewegliche Koordinatensystem mit sich nimmt. Indem dasselbe Koordinatensystem wie in § 4 gewählt wird, erhält man für die Coriolissche Kraft die folgende (auch nach (23) für $p=0, q=0, r=\omega$ und § 4 sich ergebende) Regel:

Denkt man sich einen Beobachter senkrecht zu der aus c und ω sowie deren Richtungen gebildeten Dreiecksfläche mit den Fußspitzen im Schnittpunkt (ωc) stehend und mit dem Gesicht nach dem Winkel (ωc) gewendet, so ist zur Linken ω und zur Rechten c zu denken, und die Coriolissche Kraft

wirkt in der Richtung von den Fußspitzen nach dem Kopf des Beobachters.

Für ein aus diskreten Massenpunkten bestehendes System gelten gleichfalls die Ausdrücke (23), wenn unter x, y, z die Koordinaten des Massenmittelpunktes verstanden werden.

§ 10. Mit Berücksichtigung der Bezeichnungen (10), (15), (22) und (23) lauten nun die allgemeinen Bewegungsgleichungen:

$$(25) \quad \begin{cases} m\ddot{x} = X + X_0 + X_f + X_t + X_c, \\ m\ddot{y} = Y + Y_0 + Y_f + Y_t + Y_c, \\ m\ddot{z} = Z + Z_0 + Z_f + Z_t + Z_c. \end{cases}$$

Hiernach nehmen die Bewegungsgleichungen für die relative Bewegung dieselbe Form wie für die absolute Bewegung an, wenn zu den *wirklichen* äußeren Kräften X, Y, Z noch die folgenden *fingierten* Kräfte hinzugefügt werden:

1. die auf den Koordinatenanfang wirkende Kraft X_0, Y_0, Z_0 ;
2. die instantane Zentrifugalkraft X_f, Y_f, Z_f ;
3. die instantane Tangentialkraft X_t, Y_t, Z_t ;
4. die Coriolissche Kraft X_c, Y_c, Z_c .

§ 11. Aus vorstehenden Bewegungsgleichungen (25) kann man leicht das *Prinzip der lebendigen Kraft* ableiten. Werden zunächst die für einen einzelnen Punkt genommenen Gleichungen (25) der Reihe nach mit $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ multipliziert, ferner die Beziehung (18) beachtet, sowie für das Quadrat der relativen Geschwindigkeit eines einzelnen Punktes

$$(26) \quad c^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$$

gesetzt, so ergibt sich durch Erweiterung der Betrachtung auf ein System von Massenpunkten:

$$(27) \quad \left\{ d(\Sigma \tfrac{1}{2} m c^2) - \tfrac{1}{2} \omega^2 dJ = \Sigma \{ (X + X_0 + X_f) dx + (Y + Y_0 + Y_f) dy + (Z + Z_0 + Z_f) dz \} \right.$$

Die Änderung der gesamten Energie erscheint hier als die Differenz der Änderung der relativen lebendigen Kraft $\Sigma \tfrac{1}{2} m c^2$ und der durch $\tfrac{1}{2} \omega^2 dJ$ gegebenen Änderung der instantanen Rotationsenergie. Man hat sich demnach in jedem Augenblick die durch die in der relativen Bahn erfolgte Translation der Masse erzeugte Energie im Betrage von $\Sigma \tfrac{1}{2} m c^2$ und die durch die relative Rotation der Masse um die instantane

Achse erzeugte Energie im Betrage von $\frac{1}{2}J\omega^2$ zu denken, und zwar hat man sich vorzustellen, daß diese relative Rotation gerade in entgegengesetztem Sinne vor sich geht wie die absolute Rotation des beweglichen Achsensystems.

Die dieser Änderung der Energie äquivalente Arbeit setzt sich zusammen aus folgenden Arbeiten: 1. der wirklichen auf das System wirkenden äußeren Kraft; 2. der fingierten auf den Koordinatenanfang wirkenden Kraft; 3. der fingierten Tangentialkraft. Diese dritte Arbeit fällt jedoch fort, wenn das bewegliche Koordinatensystem sich um die instantane Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit dreht, und zu bemerken ist noch, daß die Coriolissche Kraft keinen Beitrag zur Arbeit liefert.

II. Anwendungen.

§ 12. Die vorstehenden allgemeinen Sätze für relative Bewegung sollen nun auf die Bewegung eines Körpers an der Oberfläche der Erde angewandt werden, und zwar speziell auf den Foucaultschen Pendelversuch und die östliche sowie südliche Abweichung eines frei fallenden Körpers. Dabei wird nur die Rotation der Erde um ihre Achse berücksichtigt, dagegen der Einfluß der Translation der Erdkugel vernachlässigt.

P sei ein Ort auf der nördlichen Hemisphäre. Der feste Koordinatenanfang sei der Mittelpunkt der Erdkugel; die z' -Achse falle mit der Erdachse zusammen und sei nach dem Nordpol gerichtet; die x' - und die y' -Achse sollen in der Äquatorebene liegen, und zwar sei die erste in einer als Anfangslage gedachten Meridianebene, die zweite senkrecht zur letzteren und links gelegen, wenn längs Oz' ein Beobachter gedacht wird, der zu seiner Rechten die x' -Achse hat. Lotrecht über dem Orte P sei der Koordinatenanfang des beweglichen Achsensystems; die x -Achse sei die Schnittlinie der durch O gelegten Horizontalebene mit der Meridianebene und nach Norden gerichtet (parallel der Tangente in P an den Meridiankreis); die y -Achse liege in der Horizontalebene durch O und sei nach Osten gerichtet; die z -Achse endlich falle in die Richtung des Lotes.

Es sei noch $O'(x_1, y_1, z_1)$ ein mit der Erde fest verbundenes Hilfskoordinatensystem, das zu Anfang mit dem absolut festen Koordinatensystem $O'(x', y', z')$ zusammenfällt.

Es bedeuten: φ die geographische Breite des Ortes P ; ω die konstante Winkelgeschwindigkeit der Erde; h und k die Entfernungen des Koordinatenanfanges O von der Erdachse bez. Äquatorebene.

§ 13. Zwischen dem festen Koordinatensystem $O'(x', y', z')$ und dem Hilfskoordinatensystem $O'(x_1, y_1, z_1)$ gelten die Transformationsgleichungen:

$$(28) \quad \begin{cases} x' = x_1 \cos \omega t - y_1 \sin \omega t, \\ y' = x_1 \sin \omega t + y_1 \cos \omega t, \\ z' = z_1. \end{cases}$$

Ferner herrschen zwischen dem Hilfskoordinatensystem $O'(x_1, y_1, z_1)$ und dem beweglichen Koordinatensystem $O(x, y, z)$ die Beziehungen:

$$(29) \quad \begin{cases} x_1 = h - x \sin \varphi - z \cos \varphi, \\ y_1 = y, \\ z_1 = k + x \cos \varphi - z \sin \varphi. \end{cases}$$

Werden die Ausdrücke (29) in (28) eingesetzt, so erhält man die Beziehungen zwischen dem festen Koordinatensystem $O'(x', y', z')$ und dem beweglichen Koordinatensystem $O(x, y, z)$:

$$(30) \quad \begin{cases} x' = h \cos \omega t - x \sin \varphi \cos \omega t - y \sin \omega t - z \cos \varphi \cos \omega t, \\ y' = h \sin \omega t - x \sin \varphi \sin \omega t + y \cos \omega t - z \cos \varphi \sin \omega t, \\ z' = k + x \cos \varphi - z \sin \varphi. \end{cases}$$

§ 14. Werden nun mittels der in diesen Transformationsgleichungen vorkommenden Richtungskosinusse die Ausdrücke (2) gebildet, so erhält man für die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit des beweglichen Koordinatensystems um die instantane Achse:

$$(31) \quad \begin{cases} p = \omega \cos \varphi, \\ q = 0, \\ r = -\omega \sin \varphi. \end{cases}$$

Hieraus folgt, daß die durch O gehende instantane Achse stets parallel der Erdachse verläuft, also eine Gerade ist, die vom Koordinatenanfang nach dem Polarstern gerichtet ist. Die Richtung dieser Achse ist gegeben durch

$$(32) \quad \frac{p}{\omega} = \cos \varphi, \quad \frac{q}{\omega} = 0, \quad \frac{r}{\omega} = -\sin \varphi.$$

Nun dreht sich das bewegliche, mit der Erde fest verbundene Koordinatensystem im Sinne Nord über West; für einen mit dem Koordinatensystem fest verbundenen Beobachter dreht sich daher nach § 5 der sich bewegende Körper in entgegengesetztem Sinne, also im Sinne Nord über Ost, wie der Zeiger einer Uhr; durch diese relative Drehung des Körpers wird die Energie $\frac{1}{2} J \omega^2$ erzeugt.

§ 15. Die auf den Körper von außen wirklich wirkenden Kräfte sollen getrennt werden in

1. die Erdattraktion mit den Komponenten X, Y, Z ;

2. andere äußere Kräfte Ξ, H, Z , wie z.B. Luftwiderstand u. a. Speziell im Falle des Foucaultschen Pendels soll hierunter die Tension R des Fadens verstanden werden, an dem der Pendelkörper befestigt ist; bezeichnet l die Länge des im Koordinatenanfang O aufgehängten Fadenpendels, so ist

$$\Xi = -R \frac{x}{l}, \quad H = -R \frac{y}{l}, \quad Z = -R \frac{z}{l},$$

und als Bedingungsgleichung tritt noch hinzu:

$$(33) \quad x^2 + y^2 + z^2 = l^2.$$

§ 16. Die auf den Koordinatenanfang wirkende Kraft erhält man aus der Lage des Koordinatenanfanges:

$$(34) \quad x_0 = h \cos \omega t, \quad y_0 = h \sin \omega t, \quad z_0 = h,$$

woraus unter Benutzung von (10) folgt:

$$(35) \quad \begin{cases} X_0 = -\omega^2 h \sin \varphi, \\ Y_0 = 0, \\ Z_0 = -\omega^2 h \cos \varphi. \end{cases}$$

Diese fingierte Kraft ist, wie man sieht, die im Koordinatenanfang an der Einheit der Masse angebrachte Zentrifugalkraft, die infolge der Rotation der Erde um ihre Achse erzeugt wird.

§ 17. Für die Komponenten der durch die relative Drehung des Körpers um die instantane Achse erzeugten *Zentrifugalkraft* erhält man nach (15) unter Benutzung von (31):

$$(36) \quad \begin{cases} X_f = \omega^2 (x \sin \varphi + z \cos \varphi) \sin \varphi, \\ Y_f = \omega^2 y, \\ Z_f = \omega^2 (x \sin \varphi + z \cos \varphi) \cos \varphi. \end{cases}$$

Diese fingierte Kraft stellt dar eine fortwährende, in ein und demselben Sinne, nämlich im Sinne Nord über Ost (vgl. § 14) um die instantane Achse erfolgende (scheinbare) Drehung des Körpers; die Bedeutung dieser Kraft soll noch weiter unten erörtert werden.

§ 18. Für die *Coriolissche Kraft* ergibt sich nach (23) und (31):

$$(37) \quad \begin{cases} X_c = -2 \omega \dot{y} \sin \varphi, \\ Y_c = 2 \omega (\dot{x} \sin \varphi + \dot{z} \cos \varphi), \\ Z_c = -2 \omega \dot{y} \cos \varphi. \end{cases}$$

Die Richtung dieser Kraft erhält man nach der in § 9 erwähnten Regel.

§ 19. Die instantane Tangentialkraft fällt wegen konstanter Winkelgeschwindigkeit ω in diesem Falle fort, und es ergeben sich für einen mit der Masse $m=1$ sich bewegenden Punkt nach (25) die folgenden allgemeinen Bewegungsgleichungen:

$$(38) \quad \begin{cases} \ddot{x} = X - \omega^2 h \sin \varphi + \omega^2 (x \sin \varphi + z \cos \varphi) \sin \varphi \\ \quad \quad \quad - 2 \omega \dot{y} \sin \varphi + \Xi, \\ \ddot{y} = Y + \omega^2 y + 2 \omega (\dot{x} \sin \varphi + \dot{z} \cos \varphi) + H, \\ \ddot{z} = Z - \omega^2 h \cos \varphi + \omega^2 (x \sin \varphi + z \cos \varphi) \cos \varphi \\ \quad \quad \quad - 2 \omega \dot{y} \cos \varphi + Z. \end{cases}$$

Diese Gleichungen stimmen mit den von Poisson¹⁾ für die Bewegung eines Körpers an der Erdoberfläche entwickelten Gleichungen überein, wenn unter Ξ , H , Z die Komponenten des Luftwiderstandes verstanden werden und das Koordinatensystem entsprechend geändert wird.

1) S. D. Poisson, l. c.

Die fingierte, auf den Koordinatenanfang wirkende Kraft (35) ist, wie in § 16 hervorgehoben, gleich der aus der Rotation der Erde entspringenden Zentrifugalkraft des mit der Erde fest verbundenen Koordinatenanfanges O , und man kann offenbar die Ausdrücke

$$(39) \quad \begin{cases} X + X_0 = X - \omega^2 h \sin \varphi, \\ Y + Y_0 = Y, \\ Z + Z_0 = Z - \omega^2 h \cos \varphi \end{cases}$$

als die Komponenten der an dem Orte P vorhandenen Schwere ansehen.

Hiernach ist die Schwere die Resultante aus der Erdattraktion und der auf den Koordinatenanfang wirkenden Kraft.

Der Einfachheit halber kann man noch die weitere Annahme machen, daß die Schwere g nach der Vertikalen des Ortes gerichtet sei; man kann also setzen:

$$(40) \quad X - \omega^2 h \sin \varphi = 0, \quad Y = 0, \quad Z - \omega^2 h \cos \varphi = g.$$

§ 20. Wegen eines möglichen Mißverständnisses sei hierbei folgendes erwähnt: Unabhängig von der in der Abhandlung gegebenen Interpretation könnte man die mit ω^2 verbundenen Glieder noch anders deuten. Es sind nämlich

$$\{h - (x \sin \varphi + z \cos \varphi)\} \sin \varphi, \quad y, \quad \{h - (x \sin \varphi + z \cos \varphi)\} \cos \varphi$$

die Projektionen der Entfernung des Punktes x, y, z von der Erdachse, und daher repräsentieren die ganzen mit ω^2 verbundenen Glieder in den Gleichungen (38) formell die Zentrifugalkraft der unter dem Einfluß der Erdattraktion im Raume sich bewegenden Masseneinheit. Hieraus ist aber noch nicht zu schließen, daß die mit ω^2 und den Variablen x, y, z verbundenen Glieder zur Schwere hinzugefügt werden müssen. Für einen mit der Erde *starr* verbundenen Körper ergibt sich aus der Rotation der Erde ein zentrifugaler Trägheitswiderstand, um den die Erdattraktion geschwächt wird, und die Resultante beider ist die auf den Körper wirkende „Schwere“. *Bewegt sich* aber ein Körper im Raume über der Erdoberfläche, so wirkt auf ihn, sofern keine anderen Kräfte in Betracht kommen, nur die Erdattraktion (die reine Gravitation). Da in diesem Falle zwischen der Erde und dem Körper keine

materielle Verbindung besteht, so kann doch die Rotation der Erde dem Körper während seiner Bewegung keine besondere Geschwindigkeit erteilen, und daher kann auch von einer Zentrifugalkraft als einer auf den sich bewegenden Körper in jedem Punkte seiner Bahn wirkenden Ursache nicht die Rede sein. Deswegen können auch die variablen mit $\omega^2 x, \omega^2 y, \omega^2 z$ verbundenen Glieder der Gleichungen (38) nicht mit der Erdattraktion zusammen zur „Schwere“, als einer auf den Körper wirkenden Bewegungsursache vereinigt werden. Eine solche Kombination würde überdies im Widerspruch mit der Bestimmung der Schwere mittels des Sekundenpendels sein, wobei die Schwere an einem gewissen Orte und in einer gewissen Höhe über dem Meeresspiegel eine Konstante und nicht eine Variable der einzelnen Lagen des schwingenden Pendels ist.

Den durch (35) gegebenen konstanten, mit der Erdattraktion zur „Schwere“ vereinigten Gliedern kann man noch eine andere Bedeutung beilegen.

Um dabei ein Beispiel vor Augen zu haben, denken wir an den freien Fall eines Körpers. Im Moment des Loslassens besitzt der Körper eine von der Rotation der Erde herrührende seitliche Geschwindigkeit, und die Bewegung des Körpers wird durch zwei Ursachen bestimmt, nämlich durch die Erdattraktion und diese Geschwindigkeit. Ist nun x_0, y_0, z_0 der Anfangspunkt der Bewegung, so sind an einem Orte mit der geographischen Breite φ die Komponenten dieser Geschwindigkeit

$$\omega \{h - (x_0 \sin \varphi + z_0 \cos \varphi)\} \sin \varphi, \quad \omega y_0, \\ \omega \{h - (x_0 \sin \varphi + z_0 \cos \varphi)\} \cos \varphi.$$

Im Verhältnis zu der Entfernung h des Körpers von der Erdachse können die konstanten, mit x_0, y_0, z_0 verbundenen Glieder vernachlässigt werden, und es entspricht dieser Geschwindigkeit die von dem Körper ausgeübte Zentrifugalkraft:

$$\omega^2 h \sin \varphi, \quad 0, \quad \omega^2 h \cos \varphi,$$

um welche die Erdattraktion vermindert wird.

Wird dieses Ergebnis mit der von uns definierten Schwere (39) verglichen, so sehen wir, daß diese Schwere gleichbedeutend ist mit den beiden Ursachen, durch welche die Bewegung des Körpers bestimmt ist, nämlich der Erdattraktion (reinen Gravi-

tation) und der dem Körper im ersten Moment der Bewegung durch die rotierende Erde erteilten Geschwindigkeit.

Indem also der eine Teil der „force d'entraînement“, „die auf den Koordinatenanfang wirkende Kraft“, mit der Erdattraktion zusammen die auf den Körper von außen wirkende „Schwere“ bildet, erhält der andere Teil der ersten Coriolis'schen Hilfskraft die Bedeutung einer besonderen Kraft, der „instantanen Zentrifugalkraft“, die infolge der scheinbaren Drehung des Körpers um die instantane Achse auftritt.

Die allgemeinen, für die Bewegung eines Körpers an der Oberfläche der rotierenden Erde geltenden Gleichungen (38) werden erhalten, wenn zu der Schwere neben anderen äußeren Kräften noch die instantane Zentrifugalkraft und die Coriolis'sche Kraft hinzugefügt werden.

§ 21. *Prinzip der lebendigen Kraft.* Von den wirklichen äußeren Kräften möge auf einen sich an der Erdoberfläche frei bewegenden Körper nur die Erdattraktion wirken; im Falle des Foucault'schen Pendels ist noch zu beachten, daß

$$(41) \quad \Xi dx + H dy + Z dz = 0$$

ist. Alsdann ergibt sich nach Gleichung (27) für die betrachteten Probleme:

$$(42) \quad d(\Sigma \frac{1}{2} mc^2 - \frac{1}{2} J \omega^2) = \Sigma \{(X + X_0)dx + (Y + Y_0)dy + (Z + Z_0)dz\}.$$

D. h.: Die Abnahme der gesamten lebendigen Kraft, die sich aus der Differenz der relativen lebendigen Kräfte der fortschreitenden und der um die instantane Achse rotierenden Bewegung des Körpers zusammensetzt, ist gleich der vom Körper unter dem Einfluß der Schwere geleisteten Arbeit.

§ 22. Wir kommen auf die durch (36) gegebenen Glieder der allgemeinen Gleichungen zurück; sie sind gleich den partiellen Differentialquotienten der instantanen Rotationsenergie in bezug auf die einzelnen Koordinaten. Wird (32) in (14) eingeführt, so ergibt sich unter Benutzung der Abkürzungen (20) für das instantane Trägheitsmoment:

$$(43) \quad J = A \cos^2 \varphi + C \sin^2 \varphi + 2 E \sin \varphi \cos \varphi,$$

und wird ferner auf der instantanen Achse die Strecke

$$OJ = \frac{1}{\sqrt{J}}$$

abgetragen, so sind deren Projektionen auf die einzelnen Achsen:

$$(44) \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{J}} \cos \varphi, \quad \eta = 0, \quad -\zeta = \frac{1}{\sqrt{J}} \sin \varphi.$$

Werden diese Ausdrücke in (43) eingeführt, so ergibt sich für das *instantane Trägheitsellipsoid* die Gleichung:

$$(45) \quad A \xi^2 + C \zeta^2 - 2 E \xi \zeta = 1.$$

Das Trägheitsellipsoid artet also in eine Ellipse aus. Nach § 7 kann man demnach einen Teil der Erscheinung auf eine um die instantane Achse mit der Winkelgeschwindigkeit der Erde sich im Sinne Nord über Ost drehende, mit der Masse des Körpers belegte *Ebene* zurückführen, die in jedem Augenblick ihre geometrische Form ändert und infolge ihrer (relativen) Drehung zur Zeit t die Energie $\frac{1}{2} J \omega^2$ besitzt.

§ 23. Diese relative (scheinbare) Drehung ist, wie man am einfachsten aus dem Prinzip der lebendigen Kraft erkennt, ganz unabhängig von den von außen wirkenden Kräften; zu der auf den Körper wirkenden Schwerkraft können noch andere Kräfte hinzutreten, wie die erdmagnetische Kraft, der Luftwiderstand. Zu der unter dem Einflusse der Schwere geleisteten Arbeit treten noch die Arbeiten dieser anderen Kräfte hinzu; es kann die relative Geschwindigkeit c und das Trägheitsmoment J eine Änderung erfahren; aber das durch das Glied $\frac{1}{2} J \omega^2$ charakterisierte Phänomen bleibt in jedem Falle erhalten, so daß die Drehung des Körpers um die instantane Achse von irgendwelchen äußeren Kräften überhaupt ganz unabhängig ist.

§ 24. Wird diese hier hervorgehobene Rotation auf die Komponente nach der z -Achse, d. h. in diesem Falle auf die Vertikale des Ortes P bezogen, so kann man auch sagen:

Für einen an einem Orte P unter der geographischen Breite φ der nördlichen Hemisphäre sich befindenden Beobachter wird ein Teil des durch die hier in Betracht kommenden Bewegungsgleichungen gegebenen Phänomens dadurch charakterisiert, daß sich der Körper in seiner relativen Bewegung um die *Vertikale* mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega \sin \varphi$ in der Richtung von Nord über Ost dreht.

Dieses Phänomen findet bei jeder Bewegung eines Körpers an der Oberfläche der Erde statt. Die bekannte Erscheinung beim Foucaultschen Pendelversuch, die Drehung der Schwingungsebene, findet auf diese Weise eine einfache Darstellung.

Aber das hier erwähnte, auf fingierte scheinbare Zentrifugalkräfte zurückgeführte Gesetz, in welchem die Tatsache, daß die Bewegungsebene im absoluten Raum erhalten bleibt, zum Ausdruck gelangt, ist allgemeinerer Natur als das zuerst von Foucault für ein schwingendes Pendel ausgesprochene Sinusgesetz. Am Äquator ($\varphi = 0^\circ$), wo

$$X_f = 0, \quad Y_f = \omega^2 y, \quad Z_f = \omega^2 z$$

ist, findet um die Vertikale keine Drehung des Körpers statt, wohl aber um die instantane Achse, die hier mit der parallel zur Erdachse gehenden x -Achse zusammenfällt; diese scheinbare Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit ω ist entgegengesetzt der absoluten Drehung der Erde, also von Osten über den Ort nach Westen. Am Nordpol ($\varphi = 90^\circ$) verschwindet die auf den Koordinatenanfang wirkende Kraft und die *force d'entraînement* reduziert sich nur zu der instantanen Zentrifugalkraft:

$$X_f = \omega^2 x, \quad Y_f = \omega^2 y, \quad Z_f = 0.$$

Die instantane Achse fällt mit der z -Achse zusammen und durch diese fingierte Zentrifugalkraft wird die scheinbare Drehung der Bewegungsebene des Körpers um die Erdachse, und zwar im umgekehrten Sinne der Erddrehung erklärt.

§ 25. Diesen allgemeinen Auseinandersetzungen sei noch eine kurze Betrachtung des Vorganges beim Foucaultschen Pendelversuch hinzugefügt. Im Moment des Abbrennens des Fadens, wo das Pendel noch fest mit der Erde verbunden ist, besitzt es infolge der Erdrotation eine besondere Geschwindigkeit; diese bestimmt dann zusammen mit der Erdattraktion die wirkliche Bewegung des Pendelkörpers auf der Peripherie einer durch den Aufhängungspunkt des Pendels gehenden Kreisebene (bez. beim sphärischen Pendel auf einer glatten Kugeloberfläche), d. h. die wirkliche Bewegung geschieht nach dem im § 20 Gesagten unter dem Einfluß der „Schwere“.

Während der Bewegung findet eine scheinbare Drehung des Pendelkörpers um die Vertikale mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega \sin \varphi$ statt, und zwar im Sinne Nord über Ost, gleichgültig, nach welcher Seite das Pendel schwingt. In den Umkehrpunkten, wo allein die instantane Zentrifugalkraft auftritt, wird diese Drehung am größten sein, und gerade diese Stellen sind für den Versuch maßgebend; dagegen wird beim Durchgang durch die Vertikale keine Drehung stattfinden. Die Frage nach der Amplitude der Schwingung hat hier gar keine Bedeutung.

§ 26. Der bisherigen, zuerst von Binet¹⁾ gegebenen Theorie des Foucaultschen Pendelversuches sind Differentialgleichungen zugrunde gelegt, welche außer der Schwere und Fadentension nur noch die Coriolissche Kraft enthalten; auf diese Weise wird die Drehung der Schwingungsebene dieser fingierten Kraft zugeschrieben. Folgende Überlegung zeigt jedoch, daß durch diese Kraft eine Drehung der Schwingungsebene in einem und demselben Sinne nicht erklärt werden kann. Denken wir uns, daß sich das im Anfangspunkt unseres Koordinatensystems befestigte Fadenpendel z. B. in der Meridianebene nach Norden hin bewege; dann wirkt nach der in § 9 erwähnten Regel, da zur Linken die Achse der Rotation des beweglichen Koordinatensystems, zur Rechten die relative Geschwindigkeit des Körpers liegen soll, die Coriolissche Kraft nach *Osten*. Wenn nun das Pendel nach der entgegengesetzten Seite, also nach Süden, schwingt, dann wirkt die Coriolissche Kraft, da die Achse der Drehung des beweglichen Koordinatensystems stets parallel der Erdachse nach dem Polarstern gerichtet bleibt, nunmehr entgegengesetzt wie vorhin (nach *Westen*), und man sieht, daß man bei dem Foucaultschen Pendelversuch die in einem und demselben Sinne erfolgende gleichmäßige Drehung der Schwingungsebene durch die Coriolissche Kraft nicht erklären kann. Vielleicht wird man auf diese fingierte Kraft gewisse Störungen zurückführen können; sie wird die Tendenz haben, die Drehung das eine Mal zu begünstigen, das andere Mal zu verhindern. Zu Anfang und gegen Ende einer Schwingung erreicht die Coriolissche Kraft

1) J. Binet, l. c.

ihr Minimum, beim Durchgang durch die Vertikale, wo die Geschwindigkeit des Pendels am größten ist, ihr Maximum. Auch dieser Umstand spricht gegen die bisherige Theorie; denn hierdurch kann die schleifenartige Spur beim Foucaultschen Pendelversuch nicht erklärt werden. Ob überhaupt eine Wirkung der Coriolisschen Kraft in diesem Falle auftritt, ist sehr zu bezweifeln; Poisson¹⁾ sagt von dieser Kraft: „En calculant cette dernière force, on trouve qu'elle est trop petite pour écarter sensiblement le pendule de son plan, et avoir aucune influence appréciable sur son mouvement.“

Die üblichen, für unendlich kleine Schwingungen auf Grund der Binetschen Gleichungen gemachten Näherungsrechnungen gelten nur für einen Teil der unendlich kleinen Schwingung und können weiter nichts ergeben als die Richtung der während dieses Teiles der unendlich kleinen Schwingung vorhandenen Coriolisschen Kraft, die bei Umkehr der Bewegungsrichtung die entgegengesetzte Richtung annimmt. Die Unrichtigkeit des gewöhnlichen elementaren Beweises der „Unveränderlichkeit der Schwingungsebene“, „der kaum für eine unendlich kleine Zeit und höchstens dafür allein gültig ist“, hebt besonders Röthig²⁾ hervor, doch scheint dieses wenig Beachtung gefunden zu haben.

§ 27. Im folgenden sei noch ein anderes Beispiel erwähnt, bei dem die scheinbare Drehung der Bewegungsebene in Frage kommt.

Wie bekannt, findet bei einem frei fallenden Körper eine Abweichung nach Osten statt, und man sagt, daß der fallende Körper dem Fußpunkt der durch die Anfangslage des Körpers gelegten Vertikalen voranläuft. Diese östliche Abweichung kann nun als Folge der relativen Bewegung, und zwar auf die Wirkung der fingierten Coriolisschen Kraft zurückgeführt werden. Die relative Geschwindigkeit ist in diesem Falle vertikal nach unten, die instantane Achse der Rotation des mit dem Beobachter fest verbundenen beweglichen Koordinatensystems vom Koordinatenanfang, dem Anfangspunkt der Bewegung, nach dem Polarstern gerichtet, die Coriolissche Kraft

1) S. D. Poisson, l. c. p. 24.

2) O. Röthig, l. c. p. 155.

wirkt daher nach Osten. Streng genommen, ist die relative Geschwindigkeit vertikal nach unten nur in dem Anfangspunkt der Bewegung gerichtet; wenn aber die östliche Deviation bereits eingetreten ist, so fällt die relative Bahn des Körpers nicht mehr mit der Vertikalrichtung zusammen und die Coriolis'sche Kraft wirkt nicht mehr genau nach Osten, sondern es tritt eine kleine Komponente nach Süden auf. Auf diese von Gauss¹⁾, Poisson²⁾ u. a. berechnete Komponente hat man die namentlich von Hook³⁾, Guglielmini³⁾, Benzenberg⁴⁾ und Reich⁵⁾ wenn nicht bewiesene, so doch behauptete Abweichung nach Süden zurückführen wollen.

Unabhängig von dieser kleinen Komponente kann die südliche Abweichung noch in dem hier beschriebenen Foucault'schen Phänomen, d. h. in der scheinbaren Drehung der Bewegungsebene im Sinne Nord über Ost gesucht werden. Da aber die Fallzeit nur wenige Sekunden beträgt, so dürfte es kaum gelingen, diese scheinbare Drehung des frei fallenden Körpers um die instantane Achse experimentell wirklich zu beweisen. Der von Reich zwar angegebene, doch keineswegs als sicher hingestellte Wert von etwa 4 mm ist für die hier in Frage kommende südliche Abweichung gewiß zu groß. Diese Abweichung würde einer Drehung „der ebenen Masse“ um die Vertikale um ca. 8° in 6 Sek. entsprechen, d. h. um denjenigen Winkel, den ein Foucault'sches Pendel in Freiberg i. S. in $\frac{3}{4}$ Stunden beschreiben würde. In 6 Sek. beschreibt das Pendel in den Breitengraden von 50° einen Winkel von etwa $0,02^\circ$, d. i. in Bogenmaß ausgedrückt, gleich 0,00035; wird diese Abweichung auf einen Bogen, dessen Radius gleich der von Reich beobachteten östlichen Abweichung von 28,4 mm ist, bezogen, so erhält man für die südliche Abweichung etwa 0,01 mm; dieser Wert ist zwar doppelt so groß als der von

1) C. F. Gauss, Werke V. Bd. p. 495. Göttingen 1877.

2) S. D. Poisson, l. c.

3) Vgl. J. F. Benzenberg, Versuche über das Gesetz des Falles etc. Düsseldorf 1804.

4) J. F. Benzenberg, l. c.; ferner Versuche über die Umdrehung der Erde. Düsseldorf 1845.

5) F. Reich, Fallversuche etc. Freiberg 1832; Pogg. Ann. 29 p. 494. 1833.

der kleinen südlichen Komponente der Coriolisschen Kraft herrührende, liegt aber doch ganz im Bereich der Beobachtungsfehler.¹⁾ — Beim Foucaultschen Pendelversuch kann die Bewegungszeit des Körpers beliebig verlängert und daher auch die scheinbare Drehung des Körpers um die instantane Achse durch das Experiment festgestellt werden.

Mit vorliegenden Betrachtungen hängen noch andere Probleme eng zusammen, wie der Wurf nach oben, der Seitendruck der Eisenbahnzüge auf die Schienen u. a.

§ 28. Das in der Abhandlung Gesagte kann man kurz folgendermaßen zusammenfassen: Die allgemeine Theorie der relativen Bewegung führt die Erscheinungen auf gewisse fingierte Kräfte zurück. Bei dem Problem der Bewegung eines Körpers an der Oberfläche der rotierenden Erde erhält man in bezug auf ein mit der Erde sich drehendes Koordinatensystem die Bewegungsgesetze, wenn zu den *wirklichen* auf den Körper wirkenden Kräften noch die folgenden *fingierten* Kräfte hinzugefügt werden:

1. Die auf den Koordinatenanfang wirkende Kraft, die gleich der aus der Rotation der Erde um ihre Achse entspringenden Zentrifugalkraft ist und mit der Erdattraktion zusammen die auf den Körper wirkende Schwere bildet.

2. Eine bisher nicht beachtete besondere Zentrifugalkraft, die von der eben erwähnten vollständig zu trennen ist und aus einer scheinbaren Drehung des sich bewegenden Körpers um eine durch den Beobachtungsort parallel zur Erdachse gezogene Gerade entstanden gedacht werden kann. Diese Drehung ist unabhängig von irgend welchen äußeren Kräften und erfolgt mit der Winkelgeschwindigkeit der Erde, aber im umgekehrten Sinne der Erddrehung. Wird die Drehung auf die Vertikale des Beobachtungsortes bezogen, so erhält man das zuerst von Foucault für die scheinbare Drehung der Schwingungsebene eines Pendels ausgesprochene Sinusgesetz.

1) Dasselbe gilt auch von dem in neuester Zeit von Edwin H. Hall (The Physical Review 17. p. 179 u. 245. 1903) für die südliche Abweichung angegebenen Wert von $0,050 \pm 0,043$ mm bei einer Fallhöhe von 23 m.

3. Die Coriolissche Kraft, welche die östliche Abweichung eines frei fallenden und die westliche Abweichung eines aufwärts geworfenen Körpers erklärt, jedoch zur Deutung der von Foucault beobachteten Erscheinung, wie es bisher geschah, nicht benutzt werden kann, da bei Umkehr des Pendels diese fingierte Kraft nicht denselben, sondern den entgegengesetzten Richtungssinn annimmt.

Charlottenburg, Juli 1905.

(Eingegangen 28. Juli 1905.)

Nachtrag während der Korrektur. Die in § 19 aufgestellten Bewegungsgleichungen habe ich bereits früher (Bulletin de l'Acad. d. Sc. de Cracovie p. 472. 1904) unter der von vornherein eingeführten Vereinfachung entwickelt, daß die Komponenten der Schwere 0, 0, g sind. Diese Gleichungen wurden von Hrn. Rudzki (Ibid. p. 253. 1905) für „fehlerhaft“ erklärt. Ich habe hierauf bereits in der „Physikalischen Zeitschrift“ (6. p. 559. 1905) erwidert und darauf hingewiesen, daß seine eigentümlichen Betrachtungen zum Teil auf ein Mißverständnis meiner Arbeit, zum Teil auf eine auffällige Verwechselung der Begriffe der Ruhe und Bewegung hinauskommen.

4. Studien über Diffusionsvorgänge wässriger Lösungen in Gelatine;¹⁾ von Peter Nell.

Inhalt: I. Einleitung. II. Versuche zur Bestimmung von Diffusionskonstanten. III. Einfluß der Gelatine auf die Diffusion wässriger Lösungen. IV. Einfluß der Gelatine auf die Leitfähigkeit der Elektrolyte. V. Nachtrag.

I. Einleitung.

Die Literatur und die praktischen Arbeiten über das für die allgemeine Naturwissenschaft, besonders aber für die Tier- und Pflanzenphysiologie so wichtige Kapitel der Diffusion sind heute kaum mehr zu überschauen. Aber der Mangel an übereinstimmenden Ergebnissen auf diesem experimentell schwierigen Gebiete regt stets zu neuen Versuchen an.

Eine der größten neueren Arbeiten dieser Art ist die im Jahre 1900 in der *Phil. Transact.*²⁾ erschienene Abhandlung der beiden Botaniker Brown und Escombe, betitelt: *Static Diffusion of Gases and Liquids in relation to the Assimilation of Carbon and Translocation in Plants.*

Obschon diese Arbeit zu botanischen Zwecken unternommen wurde, so ist ihr Inhalt doch auch für den Physiker von nicht zu unterschätzendem Interesse. Die Verfasser knüpften in ihrer Betrachtung an an die unverhältnismäßig großen Mengen Kohlensäure, die das Pflanzenblatt zu absorbieren und zu assimilieren vermag. Ihnen war es klar, daß sie nur dann zu einer befriedigenden Lösung ihrer physiologischen Fragen kämen, wenn sie vorher eingehend die Absorption und Diffusion der Kohlensäure studiert hätten. Eines der merkwürdigsten Ergebnisse ihrer Untersuchungen war das, daß die Öffnungsfläche eines Blattes (Summe der Porenflächen) das Vielfache

1) Bonner Inaugural-Dissertation.

2) H. T. Brown u. F. Escombe, *Phil. Transact. of the Royal Soc. of London* 193 B. p. 223—292. 1900.

der Kohlensäure absorbieren kann, welche *eine* zusammenhängende Öffnungsfläche derselben Größe absorbiert. Die Verfasser ahmten daraufhin das natürliche Blatt dadurch nach, daß sie dünne, undurchlässige Metallscheiben mit gleichmäßig verteilten engen Öffnungen versahen. Um den Einfluß einer solchen Metallscheibe auf die Menge der absorbierten Kohlensäure zu zeigen, verfahren sie also: Die Kohlensäure der Luft wurde von konzentrierter Natronlauge sozusagen vollständig absorbiert. Den Zugang der atmosphärischen Kohlensäure zu dieser Natronlauge bildete eine breite zylindrische Röhre, die durch die oben erwähnte Metallscheibe verschließbar war. Sie fanden alsdann, daß ein solches feindurchlochstes Blatt unter Umständen genau ebensoviel Kohlensäure absorbieren ließ, wenn die Summe der Lochfläche ca. $\frac{1}{5}$ der ganzen Blattfläche betrug, wie wenn das Sieb überhaupt ausgeschaltet war, d. h. die Lochfläche $\frac{1}{1}$ betrug.

Nahmen die Verfasser verschiedene Metallblätter mit nur *einer* zirkularen Durchbohrung, so fanden sie, daß unter sonst gleichen Umständen die Menge des absorbierten bez. diffundierten Gases proportional war dem Durchmesser der Öffnung, nicht aber proportional der Öffnungsfläche. Vorausgesetzt ist hierbei, daß die Öffnungsfläche klein, das Metallblatt sehr dünn und die gesamte Blattfläche relativ groß war.

Die Erklärung dieser merkwürdigen Verhältnisse unternahm J. Larmor. Er betrachtete zunächst eine Scheibe mit *einer* in der Mitte befindlichen konzentrischen Öffnung, deren Durchmesser 3—4 mal kleiner war als die Länge und Breite der ganzen Scheibe. Wenn die Luft oberhalb der Flüssigkeit *vollkommen ruhig* ist, wird ein konvergenter Strom Kohlensäure nach der Öffnung fließen. Hat sich der stationäre Zustand hergestellt, dann wird die Kohlensäure in gewissen Entfernungen von der Öffnung unendlich viele Flächen gleicher Dichte herstellen. Senkrecht zu diesen Flächen gleicher Dichte — welche hier Schalen darstellen, die sich konzentrisch über dem Rande der Öffnung lagern — fließt der Absorptions- bez. Diffusionsstrom.

Das mathematische Problem ist dasselbe, wie es vorkommt bei einem elektrischen Felde in der Nähe eines Leiters, der in einer nichtleitenden Oberfläche eingebettet ist, und

der dieselbe Form und Dimension hat wie die absorbierende Öffnung.

Die gebogenen Oberflächen oder Schalen des Gases gleicher Dichte sind tatsächlich genau analog den ebenso gebogenen Flächen gleichen Potentials oberhalb einer elektrisierten Scheibe, während die konvergenten Stromlinien analog sind den elektrischen Kraftlinien. Mit Hilfe dieser elektrischen Analogie (vgl. Clerk Maxwell, „Electricity and Magnetism“) wird es uns plausibel gemacht, daß bei solch engen Öffnungen die Absorption bez. die Diffusion proportional ist dem Durchmesser der Öffnung. Eine Stütze findet diese Erklärung in der Analogie der durch zirkuläre Öffnungen verdunstenden Flüssigkeit, die Stefan¹⁾ auch proportional fand dem Öffnungsdurchmesser. Die Formel, durch welche Stefan den Wert der Verdunstung an einer zirkularen Oberfläche einer Flüssigkeit ausdrückt, war

$$M = 4 k \cdot a \cdot \frac{P - p''}{P - p'}.$$

Hier bedeuten: M die Menge der verdunstenden Flüssigkeit, k den Diffusionskoeffizienten des Dampfes, a den Radius der flüssigen Scheibe, P den Atmosphärendruck, p' die Dampftension an der Flüssigkeitsoberfläche, p'' die Dampftension sehr weit von derselben entfernt.

Diese Formel ist identisch mit einer von Larmor gegebenen, die man anwenden kann auf den entsprechenden Prozeß der Kohlensäure bei vollständig absorbierender Oberfläche:

$$Q = 2 \varrho \cdot k \cdot D,$$

wo Q die absorbierte Menge bedeutet, k den Diffusionskoeffizienten von Kohlensäure in Luft, ϱ die Dichte der atmosphärischen Kohlensäure an einem von der Öffnung hinlänglich entfernten Punkte, D den Durchmesser der Öffnung.

Diese letzte Formel wurde abgeleitet unabhängig von der Stefanschen Entwicklung, nur als Parallele zu den entsprechenden, wesentlich identischen elektrischen Vorgängen.

1) J. Stefan, Sitzungsber. der k. Akad. der Wissensch. zu Wien 83. II. p. 613. 1881.

[Die allgemeine Formel würde hier heißen müssen:

$$Q = 2k(\rho - \rho_0)D,$$

wo ρ_0 die Dichte der Kohlensäure an der absorbierenden Oberfläche selbst wäre. Bei vollständig absorbierender Oberfläche ist aber $\rho_0 = 0$; daher die obige Formel.]

Was die praktische Darstellung der vorerst nur auf Grund der elektrischen Parallele als vorhanden gedachten Schalen anbetrifft, so gelang diese den Verfassern dadurch, daß sie gefärbte Substanzen durch die kreisrunde Öffnung eines Glimmerblattes in wässrige Lösung (der zur Vermeidung von Konvektionsströmen etwas Gelatine zugesetzt war) hineindiffundieren ließen, und dann nach gewissen Zeitabschnitten den Fortschritt der Sphäroide photographisch festlegten. Die

Gesamtheit der Photographien vereinigten sie alsdann zu einem Bildsystem. Die Ergebnisse entsprachen in allen Fällen den theoretisch vorausgesagten Figuren. Von den theoretisch erörterten Fällen wollen wir hier nur einen herausgreifen, da nur dieser für unsere späteren Untersuchungen in Betracht kommt.

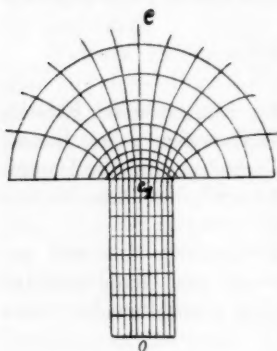


Fig. 1.

Denken wir uns in 0 (Fig. 1) eine vollständig absorbierende Oberfläche, d. h. die Konzentration ρ_0 der Kohlensäure gleich 0. In e_1 sei die Konzentration gleich ρ_1 , in e sei dieselbe ρ . Die durch den Querschnitt e_1 passierende Kohlensäure sei gegeben durch

$$Q_1 = k(\rho_1 - \rho_0) \frac{A}{L}.$$

Hier bedeutet L die Länge der Röhre $\overline{oe_1}$ und A den Querschnitt dieser Röhre:

$$A = \left(\frac{D}{2}\right)^2 \pi.$$

Wenn der stationäre Zustand hergestellt ist, so ist $Q_1 = Q$. Offenbar hindert die Schalenbildung an dem oberen Ende der

Röhre die Diffusion. Dieser hindernde Einfluß wäre derselbe, wenn die Röhre um irgend eine Strecke X länger wäre und die Schalenbildung nicht stattfände. In dieser neuen Röhre wäre dann das Konzentrationsgefälle nicht $\varrho_1 - \varrho_0$, sondern $\varrho - \varrho_0$, und die Länge wäre nicht mehr L , sondern $L + X$. Statt

$$k(\varrho_1 - \varrho_0) \frac{A}{L}$$

können wir dann setzen

$$k(\varrho - \varrho_0) \frac{A}{L + X},$$

da ja $Q_1 = Q$ ist.

Da nun $\varrho_0 = 0$, bekommen wir

$$k \cdot \varrho_1 \frac{A}{L} = k \cdot \varrho \cdot \frac{A}{L + X}.$$

Wir erhalten somit die Gleichung:

$$Q = Q_1 = 2 k (\varrho - \varrho_0) D = k \varrho_1 \frac{A}{L} = k \varrho \frac{\left(\frac{D}{2}\right)^2 \pi}{L + X}.$$

Für den Fall, daß $L = 0$, wird auch $\varrho_1 = \varrho_0 = 0$ und aus

$$2 k (\varrho - \varrho_1) D = \frac{k \varrho \left(\frac{D}{2}\right)^2 \pi}{L + X}$$

wird

$$2 k \varrho D = \frac{k \cdot \varrho \left(\frac{D}{2}\right)^2 \pi}{X}.$$

Daraus ergibt sich:

$$X = \frac{1}{8} \pi \cdot D = 0,393 D.$$

Daraus ergibt sich andererseits wieder

$$Q = k \varrho \frac{A}{L + 0,393 D}$$

und

$$k = Q \frac{(L + 0,393 D)}{A \cdot \varrho}.$$

Diese Formel benutzten Brown und Escombe später zur Bestimmung einer Diffusionskonstante von NaCl. [Falls das Glimmerblatt sehr dünn ist, d. h. wenn $L = 0$, so vereinfacht sich die Formel auf

$$k = \frac{Q}{2 \varrho D} \cdot]$$

Ihre experimentellen Untersuchungen zur Bestimmung der Diffusionskonstante von NaCl führten die Verfasser in folgender Weise aus:

Zylindrische Glasschalen *A* (Fig. 2), von genügender Dimension wurden an ihrem offenen Ende mit einem dünnen, zentral durchbohrten Glimmerblatt vermittelst Kanadabalsam dicht verschlossen. Alsdann wurde eine Mischung von 89,5 Teilen Wasser, 5 Teilen Gelatine und 5,5 Teilen NaCl dargestellt und die Schale genau bis zum Niveau des Glimmerblattes gefüllt.

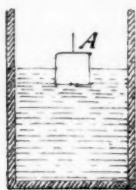


Fig. 2.

Nachdem nun diese Masse erstarrt war, wurde die Schale mit der Öffnung nach unten in destilliertes Wasser getaucht. Die Konzentration des Salzes in der Schale betrug $\varrho_1 = 0,055$, an der Berührungsebene der Gelatine mit Wasser dagegen $\varrho_0 = 0$, und zwar *stets*, da die kleinen Mengen des diffundierenden Salzes sofort durch Konvektionsströme und infolge der Schwere entfernt wurden.

Nach ungefähr 15—20 Stunden, so meinten die Verfasser, habe sich innerhalb der Gelatine der in Fig. 1 skizzierte Zustand hergestellt. Wenn wir nämlich die Durchbohrung des Glimmerblattes als zylindrische Röhre betrachten, so ist L die Dicke des Glimmerblattes, Q soll alsdann die pro Stunde diffundierte Menge NaCl bedeuten. Da Q durch Analyse des Wassers und D und L durch Messung zu finden sind, so glaubte man auf Grund der Formel

$$k = Q \frac{(L + 0,393 D)}{A \cdot \varrho} = Q \frac{(L + 0,393 D)}{\frac{D^2}{4} \pi \varrho}$$

k leicht und zuverlässig bestimmen zu können.

Das Ergebnis der Versuche geht aus der Tab. I, p. 329, hervor.

Die ungeheuren Abweichungen der hier gefundenen Werte von denen der angeführten älteren Autoren veranlaßte mich, die Methode von Brown und Escombe näher zu untersuchen. Für den Fall, daß meine Untersuchungen die obigen Ergebnisse bestätigen sollten, so wollte ich diese einfache Methode auf die Bestimmung weiterer Diffusionskonstanten ausdehnen.

Tabelle I.

Nr. des Versuches	Dauer des Versuches in Stunden	Durchmesser der Öffnung in mm	Dicke des Glimmerblattes in mm	Konzentration der Lösung. Gewicht in Volumprozenten	q	NaCl-Diff. in g		Temp.	k_i
						im ganzen	pro Std.		
1.	47,7	4,0	0,1	5,5	0,055	0,1223	0,00250	10,0°	0,0000174
2.	22,4	4,0	0,1	5,5	0,055	0,0585	0,00261	10,5	0,0000178
3.	25,7	4,0	0,1	5,5	0,055	0,0644	0,00271	12,2	0,0000185
4.	23,8	4,0	0,1	5,5	0,055	0,0661	0,00277	12,6	0,0000189

Vergleichen wir hiermit die Werte, die andere Autoren für k_i gefunden haben:

Stefan	k_{0-10}	0,0000114	Scheffer	k_{20}	0,0000134
	k_{11-75}	0,0000118		k_{30}	0,0000140
	k_0	0,0000106		k_{30}	0,0000127
	k_{10}	$\left\{ \begin{array}{l} 0,000108 \\ 0,000103 \end{array} \right.$		Schumeister	

II. Versuche zur Bestimmung von Diffusionskonstanten.

Die Versuchsanordnung zur Bestimmung von Diffusionskonstanten war im wesentlichen dieselbe wie die von Brown und Escombe. Die Öffnungsdurchmesser waren verschieden groß, um zu gleicher Zeit das „Durchmessergesetz“ erproben zu können. Die Glimmerblätter waren möglichst dünn. Die Öffnungen wurden mit scharfen Stahllochern ausgestanzt, wobei eine glatte Bleifläche die am meisten geeignete Unterlage bot. Die Dicke (L) des Glimmerblattes wurde vermittelst Mikrometerschraube, der Durchmesser (D) der Öffnungen mit dem Kathetometer der größeren Genauigkeit halber je 10 mal gemessen. Die Versuche selbst fanden in einem tiefen Keller- raume statt, der vor Temperaturänderungen vorzüglich geschützt war. Im ganzen wurden zu den acht folgenden Versuchen nur zwei Schalen gebraucht. Dieselben wurden gleichzeitig in je einem größeren Glasbehälter mit ungefähr 2 Liter destilliertem Wasser eingetaucht, mit der Öffnung nach unten, nach einer bestimmten Zeit wieder herausgenommen, abgewaschen und so schnell als eben möglich in zwei andere, gleichartige Gefäße eingetaucht. So diente die eine Schale zu den Versuchen 1, 3, 5, 7, die andere zu den Versuchen 2, 4, 6, 8. Wie aus der Formel

$$k = Q \frac{(L + 0,393 D)}{A \cdot q} = Q \frac{(L + 0,393 D)}{\left(\frac{D}{2}\right)^2 \pi \cdot q}$$

hervorgeht, ist zur Bestimmung der Diffusionskonstante k die genaue Bestimmung der in der Zeiteinheit diffundierenden Menge Salz (Q) nötig. Brown und Escombe bemerken zu dieser Bestimmung von NaCl weiter nichts, als daß sie dieselbe auf dem Wege der Cl-Bestimmung gemacht hätten, und zwar schreiben sie, daß sie das Cl als AgCl gefällt und als solches gewogen und daraus dann das NaCl berechnet hätten. Ich glaubte also, die Verfasser seien den allgemein üblichen Weg der gewichtsanalytischen Cl-Bestimmung gegangen. Ich setzte also dem mit NO_3H angesäuerten Diffusat NO_3Ag zu und erhielt im ersten Moment einen weißen Niederschlag, der jedoch in wenigen Sekunden grau, dann braun und nach einigen Stunden schwarz war. Diese Wandlung trat sowohl im Licht

als auch im Dunklen ein. Es war eben Gelatine mit dem NaCl mitdiffundiert und wirkte auf das AgCl ein. Bei weiteren Versuchen fand ich, daß der schwarze Niederschlag — der sich nur sehr schwer sammeln ließ — ungefähr nur den fünften Teil des berechneten AgCl wog. Diese Gesichtsverminderung kann natürlich nicht allein durch eine Reduktion des AgCl zu Ag bewirkt worden sein, obgleich auch diese hier mitwirkte. Es ist höchstwahrscheinlich, daß das AgCl in feinsten Verteilung von der mitdiffundierenden Gelatine absorbiert wurde und so durch das Filter ging. Andererseits ist nicht ausgeschlossen, daß die Gelatine, oder zum mindesten ein Bestandteil derselben, mit dem AgCl chemisch reagierte. Aus diesen Gründen war es nun nötig, die Gelatine unschädlich zu machen, um das Cl-Ion zur unbehinderten Reaktion zu erhalten. Es wurden zur Erreichung dieses Zweckes die verschiedensten Wege eingeschlagen. Zunächst wurde das Diffusat eingedampft und mäßig geglüht. Es trat nach Auflösung des Rückstandes in Wasser und Zusatz von NO_3Ag zwar eine reine AgCl-Fällung ein, aber das Cl war zum Teil verflüchtigt worden, wie die Kontrollversuche zeigten. Wurde das Diffusat, um es von der Gelatine auf nassem Wege zu befreien, mit NO_3H oder SO_4H_2 erhitzt, so wurde zwar die Gelatine zerstört, das Cl aber durch die starken Säuren ausgetrieben. Des ferneren war es nicht ausgeschlossen, daß aus der Gelatine sich bildende Cyanverbindungen lösliche Cyanchlorsilberdoppelsalze zustande kommen ließen. Es gelang mir auch nicht, mit Hilfe anderer Oxydationsmittel, z. B. MnO_4K , die Gelatine zu beseitigen. Verschiedentliche Versuche, das Cl auf titrimetrischem Wege zu bestimmen, hatten ebenfalls nicht den gewünschten Erfolg. Ein sehr umständlicher und mühevoller Weg zur Cl-Bestimmung war schließlich folgender:

Die ungefähr 2 Liter Diffusat wurden auf wenige Kubikzentimeter eingedampft. Diese wurden alsdann in ein Hoffmeistersches Gläschen gebracht und bis zur vollständigen Trockne eingedampft. Das Gläschen wurde alsdann mit (allerdings schwer erhältlichem) CaO verrieben und in eine Verbrennungsröhre gebracht. Nach ungefähr 20 Min. Glühzeit wurde das Verbrennungsprodukt in Wasser vorsichtig zu $\text{Ca}(\text{OH})_2 + \text{CaCl}_2$ aufgelöst, die Lösung von Glassplittern und

anderen Verunreinigungen gesäubert und schließlich das Cl als AgCl gewichtsanalytisch bestimmt.

Ich habe notgedrungen der chemischen Analyse der in Gelatine gelösten Körper im folgenden eingehendere Aufmerksamkeit schenken müssen. Das Ergebnis einer großen Anzahl von Versuchen nach dieser Richtung hin ist gewesen, daß die elektrolytisch abscheidbaren Basen, wie Cu, Ag, PbO_2 am ersten geeignet sind, quantitativ aus gelatinöser Lösung gewonnen zu werden. Vorbemerkt sei hier, daß die Diffusionsversuche mit Ag- und Pb-Salzen deshalb fehlschlagen, weil dieselben durch die Gelatine teils in das entsprechende Oxyd oder sogar in das Metall umgewandelt wurden.

Des ferneren sei bemerkt, daß außer den mit der Analyse zusammenhängenden Schwierigkeiten solche im Laufe der Versuche selbst sich herausstellten. So vermochte z. B. das Aufquellen der Gelatine in der Schale die Versuchsanordnung zu variieren. Unter Umständen drangen gewisse Bakterien in die Gelatine ein, zersetzten dieselbe und verstopften die Öffnung des Glimmerblattes.

Außerdem darf wohl nicht übersehen werden, daß die Lösungstemperatur der Gelatine deren Charakter nicht unbedeutend zu ändern vermag, wie P. v. Schröder¹⁾ uns gezeigt hat. Ich habe daher stets die Gelatine bei 70° C. gelöst und ca. 10 Min. lang auf dieser Temperatur erhalten.

Über den Einfluß der Gelatine selbst auf die Diffusion soll im dritten Abschnitt berichtet werden.

Die nachstehende Versuchstabelle p. 333 soll nach zwei Richtungen Aufschluß geben.

Die Aufstellung zeigt, daß die Diffusion einer gewissen Gesetzmäßigkeit zustrebt, und daß nach deren Erreichung das „Durchmessergesetz“ gilt:

Bei engen kreisrunden Öffnungen ist die Diffusionsmenge proportional dem Durchmesser der Öffnung.

Diesem ersten positiven Ergebnis obiger Versuchsreihe steht ein zweites, negatives entgegen:

Die Menge des pro Zeiteinheit diffundierenden Salzes erreicht keinen konstanten Wert, sondern nimmt stets ab.

1) P. v. Schröder, Zeitschr. f. phys. Chem. 45. p. 75—117. 1

Tabelle II.

Nr.	D	L	Zeit in Stunden	Temp. ° C.	Konzentration	NaCl + Gelatine diffundiert		NaCl diffundiert		Verhältnisse der		
						im ganzen	pro Std.	im ganzen	pro Std.	D	NaCl + Gelatine	NaCl
1.	1,040	0,0042	25,52	11,5	0,04	0,1880	0,007368	0,13366	0,0050886	1,8407	2,001	1,989
2.	0,565	0,0023	25,52	11,5	0,04	0,0940	0,003684	0,06871	0,0026924			
3.	1,040	0,0042	88,95	11,55	0,04	0,4531	0,005093	0,37167	0,004179	1,8407	1,865	1,960
4.	0,565	0,0023	88,95	11,55	0,04	0,2430	0,002732	0,18947	0,002130			
5.	1,040	0,0042	25,0	12,0	0,04	0,1119	0,004471	0,0861	0,003419	1,8407	1,860	1,850
6.	0,565	0,0023	25,0	12,0	0,04	0,0601	0,002404	0,0462	0,001848			
7.	1,040	0,0042	28,5	12,5	0,04	0,1228	0,004310	0,09303	0,003264	1,8407	1,853	1,840
8.	0,565	0,0023	28,5	12,5	0,04	0,0668	0,002345	0,05056	0,001778			

Dies Ergebnis dürfte wohl kaum so scharf ausgesprochen werden allein auf Grund der wenigen Versuche der Tabelle II. Eine spätere Versuchsreihe (vgl. Tab. VI) zeigt dies in viel überzeugenderer Weise. Es erscheint höchst merkwürdig, daß diese Versuche mit den Folgerungen einer sonst widerspruchslös durchgeführten Theorie nicht übereinstimmen.

Die Bestimmung einer Diffusionskonstante auf Grund der Gleichung

$$k = Q \frac{(L + 0,393 D)}{A \cdot q}$$

ist daher vorläufig nicht erreicht.

Vielleicht dürften Versuche über die Beziehungen zwischen Leitfähigkeit und Diffusion zu den erwünschten Aufschlüssen führen, zumal da (nach Versuchen in Kap. IV) die Gelatine die Diffusion und die elektrische Leitfähigkeit von Lösungen gleichmäßig modifiziert.

III. Einfluß der Gelatine auf die Diffusion wässriger Lösungen.

Wie schon bemerkt wurde, haben Brown und Escombe der NaCl-Lösung 5 Proz. Gelatine beigemischt, um die sonst stets auftretenden störenden Konvektionsströme zu vermeiden. Sie bemerkten hierzu ausdrücklich:

„Several observers have previously used gelatine or agar-agar in diffusion experiments, and have found that the rapidity of diffusion is practically the same as with water only.“¹⁾

Trotz der Autorität beider Verfasser fühlte ich mich — wie sich denn auch mehr und mehr herausstellte, nicht mit Unrecht — veranlaßt, dieser Behauptung auf den Grund zu gehen. Um zu entscheidenden Ergebnissen über den Einfluß der Gelatine zu gelangen, versäumte ich es nicht, alle mir zugänglichen Wege der Untersuchung einzuschlagen.

Die Anordnung für die Versuche der ersten Reihe war folgende:

Enge Glasröhrchen von ca. 10 cm Länge wurden mit einer wässrigen Lösung von CrO_4K_2 und Gelatine gefüllt. Die Konzentration der Gelatine variierte von 32 Proz. Gelatine bis zu

1) H. T. Brown u. F. Escombe, Phil. Trans. of the Royal Society of London 193 B. p. 246. 1900.

0prozentiger. Diese Röhrchen wurden nach dem Erstarren der Lösungen gleichzeitig und bis zu derselben Tiefe in ein größeres Gefäß mit $\frac{1}{10}$ normal NO_3Ag gestellt. Die Höhe der gebildeten CrO_4Ag_2 -Niederschläge wurde in gewissen Zeitabschnitten gemessen.¹⁾ Wenn es sich hier auch nicht um sehr scharfe Messungen handelte, so gibt uns die beifolgende Tabelle III doch genügenden Aufschluß über die Rolle, welche die Gelatine spielt.

Tabelle III.

Dauer der Versuche 130 Std. Temp. 16—19°.

Nr. der Röhre	1	2	3	4	5	6	7
NO_3Ag	$\frac{1}{10}$ N.	$\frac{1}{10}$ N.	$\frac{1}{10}$ N.	$\frac{1}{10}$ N.	$\frac{1}{10}$ N.	$\frac{1}{10}$ N.	$\frac{1}{10}$ N.
CrO_4K_2	$\frac{1}{50}$ N.	$\frac{1}{50}$ N.	$\frac{1}{50}$ N.	$\frac{1}{50}$ N.	$\frac{1}{50}$ N.	$\frac{1}{50}$ N.	$\frac{1}{50}$ N.
Gelatine in Proz.	0	1	2	4	8	16	32
Höhe der CrO_4Ag_2 -Niederschläge nach			cm	cm	cm	cm	cm
45 Std.	—	—	1,30	1,26	1,25	0,9	0,9
69 „	—	—	1,90	1,80	1,35	1,30	1,20
88 „	—	—	2,00	1,90	1,80	1,50	1,40
112 „	—	—	2,25	2,13	2,05	1,69	1,58
130 „	—	—	2,62	2,54	2,38	1,97	1,70

Die Versuche Nr. 1 und Nr. 2 mißlangen, da das schwere CrO_4Ag_2 zu Boden sank. Die Ringbildung war um so schärfer, je stärker die Konzentration der Gelatine war. Dieser Umstand legt die Vermutung nahe, daß die geringprozentige Gelatine die Konvektionsströme nur teilweise hindert. Obige Versuche haben nur einen qualitativen Wert, da die Diffusionsvorgänge durch chemische Reaktionen und durch Übersättigungserscheinungen kompliziert werden.²⁾ Diese Übelstände vermeidet die nun folgende Reihe von Versuchen. Als diffundierende Substanz wurde das Färbemittel Corallin gewonnen. Die Dauer der Versuche betrug 741 Stunden bei einer Temperatur 13—14°. Die Röhrchen hatten einen Durchmesser von 2,5 mm. Die Konzentration des Corallins war 0,00198.

1) Näheres über die Form dieser Niederschläge vgl. Nachtrag zu dieser Arbeit.

2) Vgl. Nachtrag zu dieser Arbeit.

Tabelle IV.

Nr. der Röhre	1	2	3	4	5	6	7
Prozentgehalt an Gelatine	2	2	4	4	8	8	15
Höhe d. Rotfärbung in cm	6,0	6,0	4,2	4,3	2,0	2,0	1,5

Es muß erwähnt werden, daß sich diese Ablesungen schwierig gestalteten, da zwischen Färbung und Nichtfärbung kontinuierlicher Übergang bestand. Immerhin ist auch hier der hemmende Einfluß der Gelatine unverkennbar.

Viel bessere Resultate gab folgende dritte Versuchsordnung: 28 Röhrchen, ca. 10 cm lang und alle mit dem Querschnitt $0,055 \text{ cm}^2$, wurden, der Kontrolle halber, paarweise mit gleich-prozentiger Gelatine gefüllt. Letzterer wurde eine Spur Phenolphthalein beigegeben. Als diffundierende Substanz wurde 5 proz. Kalilauge gebraucht. Das Fortschreiten der Kalilauge wurde durch die eintretende Rotfärbung des Phenolphthaleins angezeigt. Selbstverständlich mußte die Gelatine vorher auf neutrales Verhalten untersucht werden. Die Ablesung war bei hoch-prozentiger Gelatine eine scharfe. Die Konvektionsströme, die trotz der minimalen Temperaturdifferenzen auftraten, zerstörten die Versuche 14a und 14b. Aus demselben Grunde war bei 13a und 13b die Ablesung schwierig. In der Tabelle V sind außer den Höhen der Rotfärbung die Differenzen dieser Höhe aufgenommen. Die Zeitdauer der Diffusion betrug 54 Stunden.

Endlich sei noch ein anderer, vierter Weg erwähnt, auf dem der verzögernde Einfluß der Gelatine auf die Diffusion durch quantitative Analyse bewiesen wurde. Die Versuchsanordnung gleicht im Prinzip der in Abschnitt I und II schon erwähnten.¹⁾ Als diffundierendes Salz wurde SO_4Cu gebraucht. Die Diffusion selbst fand statt in einem Raume sehr konstanter Temperatur. Diese war in den ersten zwölf Tagen $13,3$ bis $13,4^\circ$, in den letzten drei Tagen $13,4$ bis $12,4^\circ$. [Die Konzentration des SO_4Cu betrug bei allen Versuchen 5 Proz.] Die Konzentration der Gelatine war bei den Versuchen I und II gleich 5 Proz., III und IV gleich 10 Proz., V und VI gleich 15 Proz. Die Öffnungen der Glimmerblätter waren besonders

1) Die Resultate sind in Tab. VI p. 338 niedergelegt.

Tabelle V.

Nr.	Prozent- gehalt an Gelatine	Höhe der Rötung cm	Mittel aus a und b	Differenzen der Höhen	Differenzen pro 1 Proz. Gelatine
1 a	18	2,00	1,99		
b	18	1,98			
2 a	16	2,20		0,20	0,10
b	16	2,19	2,19		
3 a	14	2,40		0,20	0,10
b	14	2,38	2,39		
4 a	12	2,58		0,20	0,10
b	12	2,60	2,59		
5 a	10	2,80		0,20	0,10
b	10	2,78	2,79		
6 a	8	3,02		0,22	0,11
b	8	3,01	3,01		
7 a	7	3,13		0,12	0,12
b	7	3,13	3,13		
8 a	6	3,26		0,14	0,14
b	6	3,28	3,27		
9 a	5	3,42		0,16	0,16
b	5	3,44	3,43		
10 a	4	3,61		0,18	0,18
b	4	3,62	3,61		
11 a	3	3,80		0,20	0,20
b	3	3,82	3,81		
12 a	2	4,03		0,22	0,22
b	2	4,03	4,03		
13 a	1	4,25		0,22	0,22
b	1	4,25	4,25		
14 a	0	—	—	—	—
b	0	—	—		

scharf und genau gemessen. Sie differierten im Maximum um 1,6 Proz. und diese Differenz wurde noch durch Rechnung ausgeglichen. Die Dicke (L) der Glimmerblätter wurde nach der Brown und Escombeschen Formel

$$\frac{L + X}{\left(\frac{D}{2}\right)^2}$$

in die Rechnung einbezogen. Hier hat X den früheren Wert

Tabelle VI.

I	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nr. des Versuches	D in cm	L in cm	$\frac{L+X}{\left(\frac{D}{2}\right)^2}$	Dauer in Stunden	Gesamtdauer von a, b, c und d	Abschiedene Cu des diffundierten SO_4Cu in Gramm	Summe ϵ 's Cu von a, b, c, d,	Diese Summen umgerechnet auf 1 als Einheit nach der Formel $\frac{L+X}{\left(\frac{D}{2}\right)^2}$	Mittelwerte aus Rubrik 9 für I u. II, III u. IV, V u. VI	Prozentgehalt an Gelatine	
I. a b c d	1,032	0,0073	0,15510	42,11	374,66	0,01996	0,0004740	0,14585	0,14585	0,143 705	5%
	"	"	"	148,0		0,06118	0,0004114				
	"	"	"	143,27		0,04908	0,0003424				
	"	"	"	41,28		0,01363	0,0003302				
II. a b c d	1,038	0,0039	0,15349	42,11	374,66	0,01929	0,0004694	0,14009	0,14156		
	"	"	"	148,0		0,06005	0,0004057				
	"	"	"	143,28		0,04781	0,0003837				
	"	"	"	41,27		0,01294	0,0003134				
III. a b c d	1,023	0,0074	0,15619	42,11	374,66	0,01713	0,0004068	0,11489	0,11371	0,115 33	10
	"	"	"	148,0		0,04873	0,0003400				
	"	"	"	143,30		0,03854	0,0002739				
	"	"	"	41,25		0,01049	0,0002544				
IV. a b c d	1,027	0,0048	0,15496	42,11	374,66	0,01749	0,0004153	0,11693	0,11694		
	"	"	"	148,0		0,04989	0,0003480				
	"	"	"	143,33		0,03882	0,0002771				
	"	"	"	41,22		0,01072	0,0002579				
V. a b c d	1,021	0,0080	0,15443	42,11	374,66	0,01467	0,0003484	0,09704	0,09702	0,096 24	15
	"	"	"	148,0		0,04291	0,0002900				
	"	"	"	143,42		0,03153	0,0002192				
	"	"	"	41,13		0,00793	0,0001926				
VI. a b c d	1,032	0,0027	0,15384	42,11	374,66	0,01420	0,0003372	0,09387	0,09346		
	"	"	"	148,0		0,01246	0,0002869				
	"	"	"	143,47		0,02965	0,0002136				
	"	"	"	41,08		0,00756	0,0001840				

0,393 D. Die Zeiten der einzelnen Versuche (a, b, c, d) waren praktisch gleich. So waren also für die Versuche alle Bedingungen identisch, ausgenommen die Konzentration der Gelatine. Die chemische Analyse des SO_4Cu fand auf elektrolytischem Wege statt. Das Diffusat wurde mit einigen Kubikzentimetern NO_3H auf ein Minimum eingedampft und dann elektrolysiert. Als Elektroden dienten Platinbleche von 1 bis 1,5 g Gewicht und 15–20 cm^2 Oberfläche, die vor und nach der Ausscheidung des Cu jedesmal in größeren Zeitabschnitten, sorgfältig vor Temperaturdifferenzen geschützt, bis zur vollen Gewichtskonstanz gewogen wurden. Die Stromdichte betrug bis zu $\frac{1}{60}$ Amp. pro cm^2 . Bei der Stromregulierung war sehr darauf zu achten, daß sich an der Kathode keine amorphe Kohle abschied. Die Abscheidung an der Anode fand fast stets statt, an der Kathode dagegen nur bei zu hoher Stromstärke, wodurch dann natürlich jede quantitative Cu-Abscheidung verhindert wurde. Die Ergebnisse ließen im Verhältnis zu den vielen Fehlerquellen an Übereinstimmung nichts zu wünschen übrig.¹⁾

IV. Einfluß der Gelatine auf die Leitfähigkeit der Elektrolyte.

Der innige Zusammenhang zwischen Leitfähigkeit und Diffusion, auf welchem z. B. die Nernstsche Berechnung der Diffusionskonstanten beruht²⁾, und der mir von privater Seite gemachte Einwurf, die elektrolytische Leitfähigkeit und folglich auch die Diffusion werde von verdünnter Gelatine nicht beeinflußt, bewogen mich, auch die Leitfähigkeit des SO_4Cu in Gelatine einer kurzen Untersuchung zu unterziehen. Zuerst bestimmte ich die Leitfähigkeit der von mir zu Diffusionszwecken angewandten Gelatine. Ich ließ den Prozentgehalt der Gelatine variieren von 1–20 Proz. Als Vergleichswiderstand diente gesättigte, reinste Kochsalzlösung. Als Einheit des Leitvermögens nahm ich die Leitfähigkeit derjenigen Flüssigkeit, die auf 1 cm Länge und 1 cm^2 Querschnitt den Widerstand 1 Ohm besitzt. Die Leitfähigkeit der von mir

1) Über einige bei dieser Versuchsreihe aufgetretene merkwürdige Schalenbildungen vgl. den Nachtrag zu dieser Arbeit.

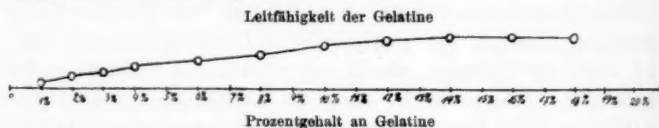
2) W. Nernst, Zeitschr. f. physik. Chem. 2. p. 613–638. 1888.

benutzten Gelatine war zwar sehr gering, durfte aber unter keinen Umständen mit der des gewöhnlichen destillierten Wassers identifiziert werden, wie uns Tab. VII zeigt.

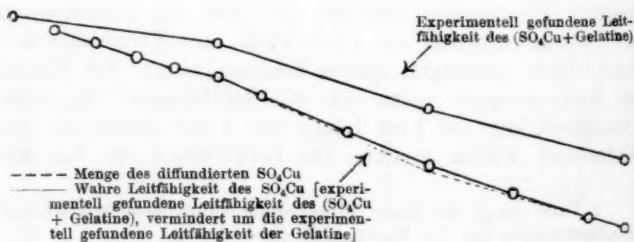
Tabelle VII.

1	2	3	4
Prozentgehalt der Lösung an Gelatine	Leitfähigkeit der Lösung	Prozentgehalt der Lösung an Gelatine	Leitfähigkeit der Lösung
1 %	0,0002544	10 %	0,0016605
2	0,0004663	12	0,0018716
3	0,0006584	14	0,0019739
4	0,0008609	16	0,0020058
6	0,0010930	18	0,0020202
8	0,0018640	20	—

Dann erst bestimmte ich die Leitfähigkeit von 5 proz. SO_4Cu in reinem Wasser und in Gelatine. Die Bestimmungen sind nicht mit eben denselben Lösungen gemacht, mit denen die Diffusionsversuche angestellt wurden. Die Temperatur dieser und jener Versuche war annähernd dieselbe. Tab. VIII zeigt uns den hindernden Einfluß der Gelatine auf die Leitfähigkeit. Die folgenden Kurven 1 und 2 veranschaulichen die Ergebnisse dieses Kapitels.



Kurve 1.



Kurve 2.

Tabelle VIII.

Temperatur 13,2°.

Nr.	Substanz	Leitfähigkeit
I	5 proz. SO_4Cu ohne Gelatine	0,016 302
II	desgl. mit 5 proz. „	0,015 365
III	desgl. mit 10 proz. Gelatine	0,013 347
IV	desgl. mit 15 proz. „	0,011 659

Vergleichen wir die Verhältnisse, in denen Diffusion und Leitfähigkeit durch die Gelatine vermindert werden, so scheinen diese, wie beifolgende Übersicht zeigt, nicht dieselben zu sein.

$$\text{Ia} = 1,246, \quad \text{IIa} = 1,494, \quad \frac{\text{Ia}}{\text{Ib}} = 1,11,$$

$$\text{Ib} = 1,126, \quad \text{IIb} = 1,319, \quad \frac{\text{IIa}}{\text{IIb}} = 1,13.$$

Hier bedeuten:

Ia das Verhältnis der diffundierten Mengen von 5 proz. SO_4Cu in 5 proz. und 10 proz. Gelatine.

Ib das Verhältnis der Leitfähigkeiten von 5 proz. SO_4Cu in 5 proz. und 10 proz. Gelatine.

IIa das Verhältnis der diffundierten Mengen von 5 proz. SO_4Cu in 5 proz. und 15 proz. Gelatine.

IIb das Verhältnis der Leitfähigkeiten von 5 proz. SO_4Cu in 5 proz. und 15 proz. Gelatine.

Daß trotz der Abweichungen zwischen Ia und Ib bez. IIa und IIb die Diffusions-Leitfähigkeitsverzögerungen durch Gelatine identisch sein können, ergibt folgende Überlegung: Bei den Leitfähigkeitsbestimmungen haben wir nicht nur das Leitvermögen des SO_4Cu , sondern auch das der Gelatine gemessen, während die Messungen der Diffusionsmengen sich nur auf das diffundierende SO_4Cu bezogen. Daher sind bei den Diffusionsversuchen die Differenzen zwischen den Ergebnissen bei 5 proz. und 10 proz. bez. 5 proz. und 15 proz. Gelatine größer als die entsprechenden Differenzen bei den Leitfähigkeitsbestimmungen. Sehr bemerkenswert scheint mir, daß diese Abweichungen in einem bestimmten Verhältnis zueinander stehen; denn die Werte für Ia/Ib und IIa/IIb kann man wohl praktisch gleich setzen. Zu einem überraschend überein-

stimmenden Ergebnisse kommen wir auf folgende Weise. Ziehen wir von der experimentell bestimmten Leitfähigkeit (Gelatine + SO_4Cu) die der Gelatine ab und setzen die dadurch erhaltenen absoluten Leitfähigkeiten des SO_4Cu in Proportion, so erhalten wir für Ib und IIb die Werte 1,24 und 1,48, die sich mit Ia = 1,246 und IIa = 1,494 wohl decken.

Diese Verhältnisse deuten darauf hin, daß, wenn wir für hohe Gelatinekonzentration eine bei dieser gültige Diffusionskonstante bestimmt haben, durch diese auf dem Wege der Leitfähigkeitsbestimmung wir zur wahren Diffusionskonstante gelangen können.

Diese meine Ergebnisse über die Beziehung zwischen Leitfähigkeit und Diffusion in Gelatine finden eine nicht zu unterschätzende Stütze in einer Beobachtung, die laut gütiger privater Mitteilung Hr. Dr. Bucherer bei Gelegenheit einer früheren Untersuchung machte.¹⁾ Er fand nämlich, daß die Kettenspannung zweier Elemente keinen Unterschied zeigt, mögen wir sie in gelatinefreier oder in gelatinöser Lösung messen. Dies Ergebnis ist nun wohl sofort plausibel. Wenn die beiden entgegengesetzten Wirkungen der Diffusion und Ionenwanderung gleichmäßig beeinflußt werden, so erleidet die Resultatenwirkung der Kettenspannung keinerlei Veränderung.

Es sei an dieser Stelle Hrn. Privatdozenten Dr. Bucherer für mehrfache Unterstützungen während der Arbeit herzlichst gedankt.

V. Nachtrag.

Wie schon in der Einleitung zu dieser Arbeit erwähnt wurde, haben Brown und Escombe den Fortschritt der Diffusionsströme in der Weise verfolgt, daß sie gefärbte Substanzen in wässrige Gelatine diffundieren ließen und in gewissen Zeitabschnitten die Färbung photographierten. Die Kombination der so erhaltenen Bilder stellte alsdann ein System von Flächen gleicher Konzentration dar. Die Normalen dieser Flächen bezeichneten dann den Weg der Diffusionsströme. Ich ging dazu über, die Richtung der Diffusions-

1) A. Bucherer, Wied. Ann. 56. p. 564—579. 1896. In der Veröffentlichung selbst ist auf diese Beobachtung nicht hingewiesen.

ströme mit Hilfe der „Liesegangschen Ringe“¹⁾ plastisch darzustellen. Die Liesegangsche Versuchsanordnung war kurz folgende:

1 Eine Glasplatte wurde mit Gelatine überzogen, die mit Kaliumchromat imprägniert war. Die Platte wurde horizontal gelegt und ein Tropfen Silbernitrat darauf gebracht. Das Silbernitrat diffundierte langsam in die Gelatine, reagierte mit Kaliumchromat und gab einen Niederschlag von Silberchromat. Das Silberchromat bildete, anstatt ununterbrochen mit der Diffusion der reagierenden Substanzen in der Gelatine fort-

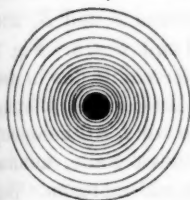


Fig. 3.



Fig. 4.

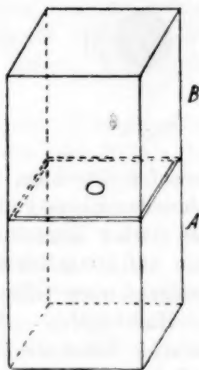


Fig. 5.

zuschreiten, deutliche Ringe um den Tropfen herum, wie Fig. 3 zeigt.

Liesegang hat auch gezeigt, daß analoge Erscheinungen auftreten, wenn das Kaliumchromat in Gelatine in eine kapillare Röhre, anstatt auf eine Platte gebracht wird. Der Niederschlag in der Röhre bildet sich in Schichten oder Scheiben senkrecht zur Achse der Röhre (Fig. 4). Diese Erscheinung der Ring- bez. Schichtenbildung ist nicht beschränkt auf den Fall der Reaktion zwischen Silbernitrat und Kaliumchromat.

Ohne vorerst auf die Erklärung dieser merkwürdigen Erscheinung einzugehen, möchte ich über meine daran anknüpfen-

1) E. Liesegang, Chemische Reaktionen in Gallerten. Düsseldorf 1898.

den Versuche berichten. Zwei kubische Glaskasten *A* und *B*, Fig. 5, die mit 5proz. wässriger Gelatine gefüllt waren, wurden durch ein mit kreisrunder Öffnung versehenes Glimmerblatt getrennt. *A* enthielt $\frac{1}{8}$ -normal NO_3Ag , *B* enthielt $\frac{1}{75}$ -normal CrO_4K_2 . Nach dem Massenwirkungsgesetz fand die Diffusion und die damit verbundene chemische Reaktion



in *B* statt. Die Niederschläge nahmen bald die Form sphäroidaler Schalen an und wuchsen ca. 3 Tage lang. Als dann wurden *A* und *B* getrennt und es zeigten sich die in Figg. 6 und 7 dargestellten Bilder. Fig. 6 stellt den Querschnitt dar in der Berührungsebene *A* und *B*, und ist identisch mit Fig. 3. Fig. 7



Fig. 6.



Fig. 7.

darauf senkrechten, durch den Mittelpunkt der Glimmeröffnung führenden Ebene und gleicht der Fig. 1 (wenn wir $L=0$ nehmen). Bei starker Konzentration, wie im vorliegenden Falle, konnte man auf 1 mm bis zu 20 Schalenbildungen wahrnehmen. Bei genügend enger Öffnung erreichten die Sphäroide bald die Form von Halbkugeln. — Es ist klar, daß es möglich ist, auf diese einfache Weise die Richtung der Diffusionsströme in den verschiedenartigsten Röhren und den verschiedensten Berührungsflächen zu studieren. Einige Versuche, die kubische Größe der CrO_4Ag_2 -Sphäroide und die Größen der Durchmesser in gesetzmäßigen Zusammenhang zu bringen, muß ich als verfehlt ansehen.

Wesentlicher erscheint es wohl, die Liesegangschen Ringe zu erläutern. Ostwald äußert sich zu dieser Frage also:¹⁾

„Durch die Diffusion des Silbersalzes in die chromhaltige Gelatine bildet sich eine Lösung, welche in bezug auf das Silbersalz übersättigt ist; der Niederschlag aber erfolgt nicht sofort, sondern erst, nachdem die metastabile Grenze²⁾ über-

1) W. Ostwald, Lehrbuch der allgemeinen Chemie (2. Aufl.) 2. 2. p. 778.

2) Über diesen Begriff vgl. daselbst p. 780—784.

schritten ist. Dies geschieht natürlich gleichzeitig in einem Kreise, der mit dem Tropfenkreise konzentrisch ist. An den entstandenen Niederschlag lagert sich das Silberchromat, in bezug auf welches die Umgebung des Ringes übersättigt ist, und verstärkt ihn; dies dauert so lange, bis das lösliche Chromat aus der Nähe in den Niederschlag gegangen ist. Als dann wandert das Silbersalz über den Ring hinaus, übersättigt ein neues, ferner liegendes, kreisförmiges Gebiet, und der gleiche Vorgang wiederholt sich. Da die Silberlösung beim Weiterdiffundieren immer verdünnter wird, so wird die kritische Konzentration, bei welcher die Abscheidung beginnt, immer später erreicht, und der neue Ring entsteht erst in einem weiteren Abstände, als der zwischen seinen Vorgängern betrug.“

Soweit Ostwald. Im Laufe meiner Untersuchungen über den Einfluß der Gelatine auf die Diffusion des SO_4Cu bemerkte ich jedoch eine Erscheinung, die nicht für die Ostwaldsche Erklärung der Liesegangschen Ringe zu sprechen scheint. Nachdem dort mit jeder der Schalen I—VI vier hintereinander folgende Versuche stattgefunden hatten und dann die Glimmerblätter von den Schalen gelöst werden sollten, gewährte ich in den Schalen III—VI, also in den Gallerten höherer Konzentration eine *scharfe*, konzentrische Schalenbildung, die im direkten Lichte durchschimmernd und klar, im reflektierten Lichte dagegen dunkel erschien. Am auffallendsten war jedoch der Umstand, daß in den Gallerten höchster Konzentration, also in V und VI, eine *doppelte* Schalenbildung stattgefunden hatte. Die Ringe waren leicht meßbar, so daß von einem kontinuierlichen Übergange oder sogar von einer Täuschung gar keine Rede sein konnte. Ein Diametralschnitt durch die Gallerten, senkrecht zur Ebene des Glimmerblattes, ergab die bekannten Sphäroide. Die Messung derselben ergab die in Tab. IX angegebenen Resultate. Um zu sehen, ob die Diffusion über die äußeren Schalen hinaus fortgeschritten sei, wurde die Gelatine in der nächsten Nachbarschaft derselben analysiert und folgende Konzentrationen wurden gefunden:

bei III gleich	4,05 Proz. SO_4Cu ,	IV gleich	3,40 Proz. SO_4Cu
„ V „	3,56 „ „	VI „	3,77 „ „

Die Diffusion fand also über die (Ringe bez.) Schalen hinaus statt.

Tabelle IX.

Nr.	D	Durchmesser der		Höhe der	
		inneren Schale	äußeren Schale	inneren Schale	äußeren Schale
	cm	cm	cm	cm	cm
III	1,023	—	2,55	—	1,65
IV	1,027	—	2,35	—	1,80
V	1,021	1,53	2,82	0,70	1,32
VI	1,032	1,40	1,90	0,65	1,25

Die Schalen verwischten sich, wenn die Gallerte längere Zeit der Einwirkung der Zimmertemperatur überlassen war. Die oben erwähnte, bei V und VI stark ausgeprägte Doppelschalenbildung kann, wie schon bemerkt, meines Erachtens nicht dazu beitragen, die Ostwaldsche Erklärung zu stützen, denn ich wüßte nicht, wo hier von „Übersättigungserscheinungen“ die Rede sein könnte, die man zur Not herbeiziehen könnte, wenn SO_4Cu ein hydrolytischer Körper wäre, in welchem Falle dann das eindringende Wasser als der übersättigende Faktor aufzufassen gewesen wäre.

Auf jeden Fall dürften diese merkwürdigen Beobachtungen ein Anreiz sein, das Wesen der Liesegangsche Ringe eingehender zu studieren.

Ergebnisse.

1. Die durch Diaphragmen mit engen Kreisöffnungen diffundierenden Lösungen sind den Durchmessern dieser Öffnungen proportional.

2. Die von Brown und Escombe angegebene Methode zur Bestimmung von Diffusionskonstanten ist in ihrer jetzigen Gestalt als nicht zutreffend anzusehen, da die ihren Versuchen zugrunde liegende Theorie lückenhaft ist. Sie führt aber möglicherweise indirekt zu einer richtigen Bestimmung.

3. Die Gelatine übt sowohl auf die Diffusion als auch auf das elektrische Leitvermögen von Lösungen einen bedeutenden, hindernden Einfluß aus.

4. Diffusion und Ionenwanderung werden von der Gelatine *gleichmäßig* beeinflusst.

5. Die Ostwaldsche Erklärung der Liesegangschen Ringe scheint nicht vollständig zu genügen.

Vorliegende Arbeit habe ich auf Veranlassung meines hochverdiennten Lehrers, des Hrn. Prof. Dr. H. Kayser, unternommen und im Physikalischen Institut der Universität ausgeführt. Ich kann nicht umhin, an dieser Stelle ausdrücklich ihm meinen ebenso schuldigen wie verbindlichen Dank auszusprechen für die so mannigfache anregende Unterstützung, mit der er den Fortgang meiner Arbeiten gefördert hat.

Auch dem Hrn. Prof. Dr. Rimbach, der mir für die Ausführung der chemischen Analysen wertvolle Fingerzeige gab, sei herzlichst gedankt.

(Eingegangen 9. August 1905.)

**5. Untersuchungen über den Einfluß der Erde
bei der drahtlosen Telegraphie;
von J. S. Sachs.**

(Auszug aus der Gießener Dissertation, mit einigen Zusätzen
von P. Drude.)

Schon bei Beginn der Versuche mit drahtloser Telegraphie fand man, daß sich die elektromagnetische Energie leichter auf dem Wasser als auf der Erde überträgt und diese Tatsache ist auch später häufig festgestellt worden. Es ist also von vornherein klar, daß die Erde auf das elektromagnetische Feld einer Hertz'schen Welle einen gewissen Einfluß ausüben muß, über die Art dieses Einflusses sind aber bisher die Ansichten noch nicht genügend geklärt. Es ist z. B. schon behauptet worden, daß die Erde notwendig für gute Übertragung der elektromagnetischen Energie sei.

Daher habe ich auf Veranlassung von Hrn. Prof. Drude quantitative Versuche in der Richtung angestellt, daß Sender und Empfänger in verschiedener Höhe über dem Erdboden angebracht wurden.

Abgesehen von den Vorversuchen, welche im Präzisionszimmer des Physikalischen Instituts zu Gießen stattgefunden haben, sind alle Messungen auf einem größeren Platze neben dem Institut vorgenommen worden, dessen Lage aus einem Situationsplane ersichtlich ist, welcher der Dissertation beigefügt ist, auf dem auch die Punkte der meisten Versuche eingezeichnet sind.

Allgemeine Anordnung.

Sender und Empfänger wurden nach dem Braunschen System mit elektromagnetischer Koppelung ausgebildet. Da für die vorzunehmenden Messungen die Verwendung eines Kohärrers im Empfängerkreise nicht in Betracht kam, und

dieser durch ein Thermoelement ersetzt wurde, so konnten beide Apparate ganz symmetrisch gebaut werden.

Das Induktorium befand sich stets in der Nähe des Gebers und wurde durch eine ca. 25 m, später 50 m lange Leitung aus der Akkumulatorenbatterie des Instituts gespeist, zeitweise auch aus einer direkt daneben aufgestellten Batterie.

Das Thermoelement war durch eine Leitung (zuerst 24 m, dann 50 m, endlich 75 m lang) mit einem Galvanometer verbunden.

Zu erwähnen wäre noch, daß am Geber eine Spule angebracht war, die mit dem Geber nicht in Resonanz stand und deren Zweck war, die vom Geber ausgehende Energie zu messen bez. präziser ausgedrückt, für die Schwankungen der vom Erreger ausgehenden Energie ein Maß zu bilden. Diese, im späteren stets Standard genannte Spule, führte gleichfalls zu einem Galvanometer.

Die Apparate.

Der *Geber* bestand aus einem Primärkreis mit Funkenstrecke und Kondensator und einem Sekundärkreis aus einer Spule mit nach beiden Seiten angehängten Antennen bez. Platten. Die Antennen bestanden aus Messingrohren von 3 m Länge und 1,4 cm Durchmesser.

Auf einem Ebonitring von 87,7 mm äußeren Durchmesser und 3 mm Dicke wurden zehn Windungen isolierten Drahtes, von 0,9 mm blank und 2,4 mm Durchmesser isoliert, aufgewickelt, die Ganghöhe der Windungen betrug 2,4 mm, die Höhe der Spule, gerechnet von Mitte zu Mitte der äußersten Drähte, war 22,2 mm. Die Drahtlänge des aufgewickelten Drahtes, also ohne freie Enden, war 2832 mm.

Die Windungen wurden durch mehrere von beiden Seiten angebrachten Elfenbeinschrauben gehalten, ferner durch vier Ebonithalter, durch welche gleichfalls der aus einer Windung blanken Drahtes von 3 mm Durchmesser und 103 mm Flächen-durchmesser bestehende Primärkreis hindurchging. Die Enden der Sekundärspule waren ca. 70 mm lang freigelegt, um daran den Anschluß an die Antennen zu ermöglichen. Die beigefügten zwei Schnitte durch die Spule geben ein anschauliches Bild der Verhältnisse und Konstruktion des Gebers. Die

beiden Zeichnungen (Fig. 1), von denen die eine den Quer-, die andere den Längsschnitt darstellt, sind in $1/2$ -Originalmaßstab gezeichnet.

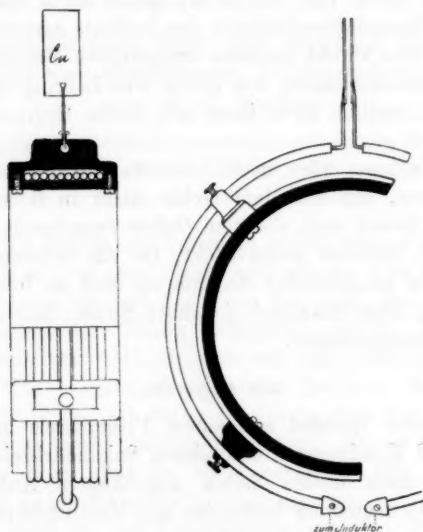


Fig. 1.

Die Berechnung der beiden Kreise auf Resonanz ist nach den Veröffentlichungen von P. Drude erfolgt.¹⁾

Die Eigenwellenlänge einer Spule ohne angehängte Kapazitäten läßt sich in der Form $1/2 \lambda_0 = f \cdot l$ ausdrücken, wenn f ein von $h/2r$ und g/δ abhängiger Parameter ist und l die aufgewickelte Drahtlänge bedeutet. Es ist ferner

- h die Höhe der Spule = 22,2 mm,
- $2r$ der Durchmesser der Spule = 90 mm²⁾,
- g die Ganghöhe = 2,4 mm,
- δ Durchmesser des blanken Drahtes = 0,9 mm.

Die Größen $h/2r$ und g/δ sind demnach 0,247 bez. 2,6.

1) P. Drude, Ann. d. Phys. 9. p. 293 ff. und p. 590 ff. 1902; 11. p. 957 ff. 1903.

2) Von Mitte zu Mitte des Drahtes gerechnet.

Daraus bestimmt sich f aus der Tabelle auf p. 322 in der zitierten Arbeit als Mittelwert zwischen Vollkern und Rohr zu 2,16 und

$$\frac{1}{2} \lambda_0 = 610 \text{ cm.}$$

Werden an eine solche Spule von beiden Seiten gleiche Antennen angeschlossen, so ändert sich naturgemäß die Eigenwellenlänge eines solchen Gebildes und sie ist zu berechnen nach der Formel

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \frac{\lambda_0}{\lambda} \cdot \operatorname{tg} 2 \pi \frac{l}{\lambda} = \log \operatorname{vulg} \frac{l}{\varrho} \cdot \frac{f}{n} \cdot \sqrt{\frac{h}{2r}} \cdot \varphi,$$

wobei bedeutet

- λ_0 die Eigenwellenlänge der Spule ohne Antennen . . . = 610 cm,
 λ " " " " mit " "
 l die Länge der Antenne . . . = 300 cm,
 ϱ den Radius der Antenne . . . = 0,7 cm,
 f den obigen Parameter . . . = 2,15,
 φ einen anderen, gleichfalls von $h/2r$ und g/δ abhängigen Parameter
 n Anzahl der Windungen auf der Spule . . . = 10.

φ ergibt sich unter Berücksichtigung der auf p. 977 der zitierten Arbeit von Drude veröffentlichten Kurve zu etwa 1,72 und demnach ist,

$$\lambda = 3120 \text{ cm.}$$

Die Selbstinduktion eines Primärkreises, der aus einem Drahte der Länge l und der Dicke 2ϱ besteht und eine Kreisfläche vom Radius r bildet, berechnet sich nach der Formel

$$L = 2l \left(\log \operatorname{nat} \frac{8r}{\varrho} - 2 \right) \cdot \frac{1}{c}$$

Dies ergibt im vorliegenden Falle, wo $l = 32 \text{ cm}$, $2\varrho = 0,15 \text{ cm}$ und $r = 10,3 \text{ cm}$ ist

$$L = 230 \text{ cm.}$$

Demnach muß die zugehörige Kapazität nach der Formel

$$\lambda = 2 \pi \sqrt{L \cdot C}$$

$C = 1070 \text{ cm}$ sein.

Da die Wahl auf einen Glasplattenkondensator gefallen ist, in der Hauptsache wegen seiner leichten Transportfähigkeit, so mußte zunächst die Dielektrizitätskonstante der vor-

1) Vgl. z. B. M. Wien, Wied. Ann. 53. p. 931. 1894.

handenen Glassorte bestimmt werden. Die experimentelle Bestimmung derselben erfolgte nach der von Drude¹⁾ ausgearbeiteten Methode und wurde annähernd gleich 7 gefunden. Die Fläche des Kondensators ergibt sich aus Formel

$$C = \frac{\epsilon \cdot S}{4 \pi d},$$

wo d die Dicke der Platte, im vorliegenden Falle 1,3 mm, bedeutet, zu 250 cm².

Um für die Vorversuche im Zimmer das Hantieren zu erleichtern, wurde gleichzeitig eine Platte aus Zinkblech hergestellt, die den Zweck hatte, eine der Antennen zu ersetzen. Die Größe dieser Platte läßt sich nach der schon zitierten Arbeit von Drude²⁾ gemäß der Formel

$$\sqrt{S} = \frac{0,603}{\log \text{vulg} \frac{l}{\rho}} \cdot \frac{\lambda}{2 \pi} \cdot \text{tg} 2 \pi \frac{l-l'}{\lambda}$$

ausrechnen, wenn S die Oberfläche der Platte, l die Länge der Antenne, ρ der Radius der Antenne, λ die Eigenwellenlänge und l' die Länge des Zuführungsdrahtes zur Platte bedeutet. Da l' zu rund 20 cm gemacht wurde, so ergab sich daraus die Fläche zu rund 5150 cm².

Die Berechnung der Apparate ist hier mit Absicht ausführlich angegeben worden, um zu zeigen, wie rasch und wie leicht sie erfolgen kann, nach der Methode von Drude.³⁾

Die Erregerfunken sprangen zwischen Zinkstücken über, die auf dem Erregerdraht aufgeschraubt waren (vgl. Fig. 1), und an die auch die Zuführungsdrähte zum Induktor angelötet waren. Derselbe hatte 15 cm Schlagweite ohne Kapazitätsbelastung und Speisung mit 10 Volt und Deprezunterbrecher.

Der Empfänger war, wie bereits gesagt, ganz gleich mit dem Geber gebaut, mit dem alleinigen Unterschied, daß an Stelle der Funkenstrecke ein Thermoelement angebracht war. Dieses bestand aus Konstantan und Eisen von je 0,05 mm

1) P. Drude, Zeitschr. f. phys. Chem. 33. p. 282. 1897; Wied. Ann. 61. p. 466. 1897; Ann. d. Phys. 8. p. 336. 1902.

2) P. Drude, Ann. d. Phys. 11. p. 990. 1903.

3) Vgl. demgegenüber die Ansicht von J. Zenneck, Physik. Zeitschr. Heft 19. 1904.

Durchmesser und war in der Mitte gelötet. Der Widerstand des Elementes, an der Wheatstoneschen Brücke gemessen, ergab einen Wert von 1,14 bis 1,19 Ohm.

Ein ähnliches Element befand sich auch an dem *Standard*, der ursprünglich dicht neben der Geberspule und axial mit ihr angebracht, später aber weiter davon entfernt war. Der Standard bestand aus zehn Windungen isolierten Drahtes von 0,9 mm blank und 2,4 mm isoliert und hatte im übrigen die Dimensionen der Geber- und Empfängerspule. Die Enden der Windungen waren durch ein oben beschriebenes Thermolement geschlossen. Der Widerstand desselben war 1,02 bis 1,01 Ohm. Nebenbei sei bemerkt, daß ein derartiges Thermolement bei 0,45 Amp. durchbrennt.

Die *Glasplattenkondensatoren* verursachten ursprünglich viele Schwierigkeiten. Sie bestanden aus 1,3 cm dickem Glase und waren anfangs mit 0,03 mm dicker Zinnfolie durch Schellack beklebt. Nun zeigte sich am Kondensator des Geberkreises die eigentümliche Erscheinung, daß nach ganz kurzem Betriebe sich Blasen bildeten, welche infolge der dadurch verursachten Änderung der Kapazität des Primärkreises ganz erhebliche Verminderung der Übertragungsergebnisse (bis 25 Proz.!) nach sich zogen. Die Beseitigung der Blasen und damit auch die Herstellung des ursprünglichen Resultates ließ sich zwar leicht bewirken, indem man die Blasen mit einer feinen Nadel anstach und sie an das Glas preßte, doch nahm das viel Zeit in Anspruch und erforderte eine fortwährende Kontrolle des Kondensators. Es wurde vergeblich versucht, durch starke Pressung des Kondensators zwischen zwei dicken Glasscheiben Abhilfe zu schaffen. Das Auftreten der Blasen wurde dadurch zwar vermindert aber nicht beseitigt. Eine nach dem Rezept von Böttger¹⁾ sehr stark versilberte Glasplatte hat schon nach den ersten Versuchen fast ihre ganze Silberschicht verloren. Endlich wurde 0,1 mm dicke Bleifolie genommen und mit Terpentin an das Glas geheftet. Diese Anordnung hat sich vorzüglich bewährt und hat zu keinerlei Anständen während der ganzen Dauer der Versuche Anlaß gegeben.

Die Kondensatoren wurden mittels der auf Fig. 1 sicht-

1) F. Kohlrausch, Lehrbuch der praktischen Physik p. 32. 1901.

baren Kupferblättchen Cu durch eine Ebonitklammer an den Erreger angepreßt.

Um die Möglichkeit zu haben, mit den Apparaten im Freien bei jeder Witterung zu arbeiten, wurden sowohl der Geber wie der Empfänger in einen entsprechenden Holzkasten eingebaut.

Die Erwärmung der Thermoelemente (sowohl des Empfängers als des Standards) wurde durch ein du Bois-Rubenssches Galvanometer (nicht astasiert, d. h. nicht besonders empfindlich gemacht, 13 Sek. Schwingungsdauer) gemessen.

Die *Ablesungen* geschahen in der Hauptsache so, daß zuerst einige Messungen am Standard gemacht wurden, dann einige am Empfänger. Bei einzelnen Versuchen hatten die Herren Dr. W. Schmidt und Conrat die große Liebenswürdigkeit, mir bei der Ablesung zu helfen, wofür ich den Herren auch an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank sage, und so konnten diese Messungen gleichzeitig für den Standard und Empfänger abgelesen werden. Die Disposition war so im allgemeinen getroffen, daß bei den Versuchen im Freien Geber und Empfänger auf dem Vorhofe des Instituts standen, während das Galvanometer im Präzisionszimmer Aufstellung fand. Wo von dieser Disposition Abweichungen erfolgten, ist dies besonders vermerkt.

Der Speisestrom des Induktors wurde regelmäßig 5 Sek. lang geschlossen.

Die angegebenen Ergebnisse sind Mittelwerte von 4 bis 10 Ablesungen, je nachdem die Werte annähernd konstant waren oder starke Schwankungen aufwiesen. Das letztere trat, nebenbei bemerkt, ziemlich häufig auf.

Die Eichung des Galvanometers mit verschiedenen vorgeschalteten Widerständen, wie sie bei den Messungen gebraucht wurden, wies in dem benutzten Meßbereich eine vollkommene Proportionalität zwischen den Ausschlägen und dem Quadrat der Stromstärke auf, welche (zur Eichung) durch das Thermoelement gesandt wurde.

Zu dem früher auf p. 349 über den Standard Gesagten muß noch folgendes nachgetragen werden. Die Angaben des Empfängers sind nicht genau proportional den Angaben des Standards, wie die folgende Tabelle zeigt, bei welcher die

Lage der Apparate unverändert blieb und nur die Größe der Funkenstrecke am Erreger geändert wurde.

Standard	40,5	54	60	78
Empfänger	157	221	253	324
Verhältnis Empfänger/Standard	3,88	4,1	4,23	4,15

Die Ursache dieser Erscheinung liegt darin, daß sowohl der Standard wie der Empfänger von dem Funkenpotential und der Dämpfung des Senders abhängen, beide aber in verschiedener Weise, weil der Empfänger in Resonanz mit dem Geber steht, der Standard nicht.

Vorversuche.

Im Zimmer aufgenommen, Geber und Empfänger mit je einer Antenne und Platte.

1. Zunächst wurde durch Änderungen der Kapazität im Primärkreise des Gebers und Empfängers untersucht, ob die Apparate in Resonanz standen. Einerseits wurde dies durch

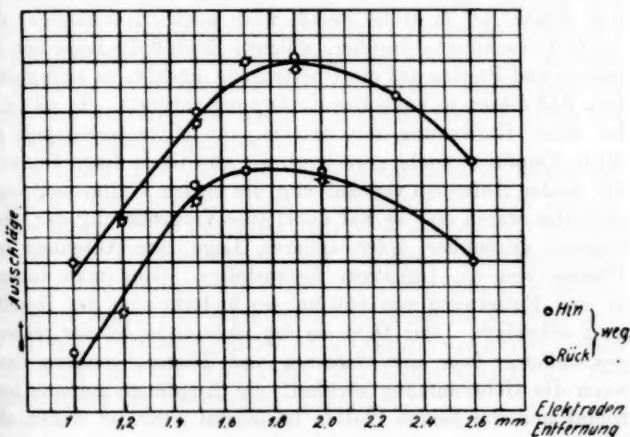


Fig. 2.

die Funkenlänge am Ende der Geberantenne, andererseits durch Ausschläge am Empfänger festgestellt. Die Resultate haben einen ganz eklatanten Beweis dafür erbracht, daß die

lediglich auf Grund der früher zitierten Arbeit von Drude berechneten Apparate in scharfer Resonanz standen, da eine geringe Änderung der Kapazität eine Verminderung der Resultate auf etwa 0,2 des Ursprünglichen nach sich zog.

2. Das Optimum der Funkenstrecke ist aus der Fig. 2 ersichtlich. Bei der oberen Kurve war der Strom jeweils 10 Sek., bei der unteren Kurve 5 Sek. geschlossen gewesen.

3. Durch verschiedene Einstellung des Deprezunterbrechers bez. durch Verwendung verschiedener Spannungen zum Speisen des Induktors, konnten die Resultate in ziemlich weiten Grenzen geändert werden.

4. Um den Einfluß der Standardspule auf die Resultate zu ermitteln, wurden mehrere Messungen mit, bez. ohne diese gemacht. Dabei zeigte es sich, daß, selbst wenn der Standard koaxial dicht neben der Geberspule aufgestellt wurde, dies eine Verminderung der Resultate um nur 5 Proz. nach sich zog.

5. Die um die Apparate aufgebauten Kästen haben gar keinen merklichen Einfluß auf die Übertragungsergebnisse geübt.

6. Über die Messungen im Zimmer, welches 12,5 m Länge, 5 m Breite, $4\frac{1}{2}$ m Höhe besaß, wäre noch zu erwähnen, daß bei Untersuchungen darüber, welchen Einfluß die Lage der Antennen und Platten auf die Übertragung ausübt, es sich gezeigt hat, daß dieser je nach der Entfernung variierte. So war z. B. bei einer Entfernung von 280 cm, von Mitte Geberspule zur Mitte Empfängerspule gerechnet, die günstigste Lage die, wenn die beiden Antennen vertikal und die beiden Platten horizontal gerichtet waren und es war dabei eine Vergrößerung der Übertragung gegenüber jeder anderen Lage der Antennen und Platten von ca. 100 Proz. festzustellen. Ging man dagegen in eine Entfernung von 660 cm, so änderte sich das Resultat ganz erheblich. Das Optimum lag nicht mehr bei der früheren gegenseitigen Lage der Antennen und Platten, sondern dann, wenn die Geberantenne vertikal, die Empfängerantenne horizontal und die beiden Platten horizontal gerichtet waren, also bei einer ganz unsymmetrischen Anordnung. Der Grund dürfte wohl daran liegen, daß an den Wänden, Leitungen etc. etc., die sich im Zimmer befanden, Reflexionen aller Art stattfanden.

Damit wäre auch der Beweis dafür geliefert, daß aus Resultaten, die in geschlossenen Räumen gewonnen sind, nur mit

Vorsicht Schlüsse auf deren Anwendung für die drahtlose Telegraphie zu ziehen sind.

Versuche im Freien.

Dabei wurden die Messungen so vorgenommen, daß die Verbindungslinie zwischen Geber und Empfänger nahezu parallel mit der Front des Institutsgebäudes verlief und die Entfernung von dieser ca. 25 m betrug. Zunächst mußte festgestellt werden, ob bez. welchen Einfluß die Zuführungsdrähte einerseits zum Induktor, andererseits zum Empfänger auf die Resultate ausübten. Es wurde daher eine ganze Reihe von Untersuchungen in folgender Weise angestellt.

Dicht an das Induktorium mit Geber wurde eine Akkumulatorenbatterie hingestellt. In einiger Entfernung davon wurde das Galvanometer für Standardablesungen aufgestellt und nur vom Empfänger führte ein isolierter Draht zum Galvanometer im Zimmer. Es wurde nun einmal der Strom aus der im Freien stehenden Batterie entnommen, ein andermal ein Draht aus dem Zimmer zum Induktorium geführt und dieses aus der Institutsbatterie gespeist. Es mußte dabei aber die Primärspannung jedesmal geändert werden, je nachdem die dicht daneben stehende Batterie benutzt wurde oder der Strom aus dem Institut durch die relativ lange Leitung mit viel Selbstinduktion geleitet wurde.

Es ergab sich, daß man ohne wesentliche Änderung der Resultate¹⁾ den Induktor durch die Leitung aus dem Zimmer speisen konnte, falls wenigstens die Antennen vertikal standen, während die Drahtleitungen zum Induktor und Empfänger horizontal und nahezu rechtwinklig zur Verbindungslinie Geber-Empfänger lagen. Letztere Nebenbedingung ist wichtig, denn ein in der Verbindungslinie ausgespannter isolierter Draht (auch wenn er vom Empfänger und Geber isoliert ist) vergrößert etwas die übertragene Energie.²⁾

















1) Bezogen auf das Verhältnis: Empfängerausschlag dividiert durch Standardausschlag. Hinsichtlich des genaueren Beweises vgl. die in der Dissertation p. 21 gegebene Tab. 1.

2) Dies ist sowohl theoretisch verständlich als auch experimentell schon mehrfach bewiesen, vgl. z. B. bei P. Drude, Wied. Ann. 65. p. 482. Anm. 1. 1898. In der Dissertation spricht dafür die auf p. 23 gegebene Tab. 2.

Nun wurden Geber und Empfänger mit je einer Antenne und ausbalancierender Platte versehen und der *Einfluß der verschiedenen Lagen der Antennen, Platten und Spulenachse von Geber und Empfänger* untersucht. Folgende Tab. 1 gibt darüber Aufschluß. Es bedeutet — Antenne, — Platte, W die Spule im Geber bez. Empfänger. Der Standard zeigte bei diesen Versuchen annähernd gleiche Ausschläge.





Tabelle 1.

Entfernung zwischen den Apparaten 30 m. Höhe über Erde 1 m.

Nr.	Lage		Ausschläge
1	G 	E 	71
2	G 	E 	98
3	G 	E 	9
4	G 	E 	5
5	G 	E 	12
6	G 	E 	16
7	G 	E 	165
8	G 	E 	53

Aus dieser Tabelle ist zu schließen, daß 1. *vertikale Antennen günstiger wirken als horizontale*, was schon bekannt ist; 2. *daß die Lage der Geber- und Empfängerwicklung zur Antenne von großem Einfluß ist*, was bisher nicht bekannt war. Wie aus der Tabelle nämlich hervorgeht, ist die Anordnung 7 bei weitem am wirksamsten, d. h. vertikale Antennen und vertikale Spulenachsen von Geber und Empfänger (vgl. die Anordnung 7 und 2). — Bei horizontalen Antennen sind dagegen horizontale Spulenachsen wirksamer als vertikale, wie der Vergleich zwischen Anordnung 3 und 4 ergibt. Dies Resultat wird auch durch weitere Versuche bestätigt, die abwechselnd nacheinander mit verschiedener Lage der Spulenachsen angestellt sind und die in Tab. 2 angeführt sind. In Reihe 1 bezeichnet z. B.

Tabelle 2.

		
Reihe 1.		
	34	192
	53	157
		137
Reihe 2.		
	65	174
	67	165
	62	
Reihe 3.		
	25	46

192 das Mittel der Ausschläge von sechs Ablesungen bei Anordnung 7 der Tab. 1 (nur daß hier die Platten horizontal lagen, worauf es aber nicht ankommt), während 34 das Mittel aus sechs Ausschlägen bei Anordnung 1 der Tab. 1 bedeutet. Dann ist wieder Anordnung 7 benutzt, die den mittleren Ausschlag 157 ergeben hat etc. Ebenso ist bei Reihe 2 verfahren, nur daß da mit Anordnung 1 angefangen ist. In Reihe 3 bezeichnet 25 den mittleren Ausschlag bei vertikalen, 46 den mittleren Ausschlag bei horizontalen Spulenachsen. Hier sind

anstatt mit ausbalancierender Platte Geber und Empfänger mit je zwei Antennen versehen.

Die Spulenachsen sollen also parallel mit den Antennen sein.

Die Erklärung dieser Erscheinung, daß in diesem Falle die Strahlung am stärksten ist, dürfte wohl darin zu suchen sein, daß in diesem Falle die magnetischen Kraftlinien der Spule parallel zu den elektrischen Kraftlinien der Antenne liegen, daß also durch die Spule keine Veränderung der Strahlung eintritt.

Wenn dagegen die Spulenachse senkrecht zur Antenne liegt, so schneiden die magnetischen Kraftlinien der Spule die elektrischen Kraftlinien der Antenne, es tritt also nach dem Poyntingschen Satze jedenfalls eine Veränderung der Strahlung des Gebers ein.

Es wären weitere Versuche darüber anzustellen, ob in diesem Falle die Dämpfung des Gebers größer ist, als wenn die Spulenachse parallel zur Antenne liegt, und ob die Strahlung nach verschiedenen Richtungen verschieden ist, was vielleicht möglich ist und für die Zwecke der gerichteten Funkentelegraphie von Bedeutung sein könnte.

Da auf dem Vorhofe sich in einer Reihe drei große und dazwischen ein kleinerer Zwetschenbaum befanden, die im vollen Laube standen, so lag es nahe, den *Einfluß der belaubten Bäume* zu untersuchen. In der Dissertation ist hierüber eine ausführliche Beobachtungstabelle mitgeteilt, aus der hervorgeht, daß Bäume im trockenen Zustande sich ziemlich neutral zu verhalten scheinen, daß dagegen feuchte Bäume als Leiter wirken und die Strahlung teilweise abschirmen.

Ein System mit symmetrischen Doppelantennen (sowohl beim Geber wie beim Empfänger) *ist drei- bis viermal wirksamer als ein System mit je einer Antenne und ausbalancierender Metallplatte.* Dies wird durch die Tab. 3 bewiesen, in der die beobachteten Galvanometerausschläge für beide Anordnungen angegeben sind.

Tabelle 3.

Versuch	Mit Doppelantennen	Mit Antenne u. Platte
Nr. 1	150	50
Nr. 2	300	84

Dies Resultat war zu erwarten, da durch Doppelantennen doppelt so viel Energie ausgestrahlt werden muß, als durch Einfachantenne und Platte, und der Empfänger mit Doppelantennen auch die doppelte Energie aufnehmen muß, als der Empfänger mit Einfachantenne und Platte.

Obgleich es eigentlich gar nicht beabsichtigt war, die Rolle der Erde als Kapazitätssatz zu prüfen, so lag es doch nahe, auch einen derartigen Versuch zu machen. Das Resultat ist in Tab. 4 wiedergegeben. Die Erdverbindung wurde so hergestellt, daß statt der Platte ein Draht von 2 mm Durchmesser mit einer angelöteten Platte von 30×20 cm tief in Erde eingegraben wurde.

Tabelle 4.



Geber und Empfänger in 30 m Entfernung.
1 m über Erde.

Geber } mit Empf. } Platten	Geb. m. Platte Empf. an Erde	Geber an Erde Empf. m. Platte	Geber } an Empf. } Erde	Geber } mit Empf. } Platten
240	160	95	116	240

Das Nachlassen in der Wirkung bei Kolumne 4 gegenüber 1 und 5 ist ganz eklatant.

Die von Erde isolierten Geber- und Empfängersysteme wirken also besser als an Erde angelegte.¹⁾

Der Unterschied von Kolumne 2 und 3 dürfte darauf zurückzuführen sein, daß wir im ersteren Falle das Zustandekommen einer richtigen Welle nicht beeinträchtigt haben.

Um nun den *Einfluß* zu prüfen, den die Erde auf die

1) Anm. von P. Drude: Daß diesem Resultate in der Praxis zum Teil widersprochen werden wird, liegt wohl wesentlich daran, daß die ausbalancierende Gegenkapazität der Antenne nicht richtig dimensioniert wird. In Oberschöneweide bei Berlin scheint die Anordnung trotz der vorhandenen Erdverbindung dem isolierten Geber- bez. Empfängersystem zu entsprechen, weil die große Käfigantenne, die zwischen vier Schornsteinen ausgespannt ist, ausbalanciert wird durch das große Zinkdach des Gebäudes. Ohne große Metallgegenkapazität mit einfacher Erdverbindung kann sich keine so gut definierte Welle ausbilden.

Fortpflanzung der Energie ausübt, wurden die nachstehenden Versuche unternommen. Es wurde dabei von dem Gesichtspunkt ausgegangen, daß wenn die Erde einen Einfluß ausübt, dieser sich mit der Entfernung über der Erde ändern muß. Zuerst wurden daher die Entfernungen, d. h. die Höhen in kleinem Maßstabe variiert, dann in etwas größeren Intervallen. Zu letzterem Zwecke wurden zwei ca. 5 m hohe Holzgestelle gebaut, die leicht transportabel waren und durch je vier Schnüre seitlich gehalten wurden. Auf die seitlich von $\frac{1}{2}$ zu $\frac{1}{2}$ m angebrachten Streben wurden nun Holzbretter gelegt und darauf die in Holzkästen eingebauten Apparate gestellt. Es erwies sich nun leider, daß bereits bei einer Höhe von 4 m die Aufstellung der Apparate so umständlich und zeitraubend war, daß vom Bau eines noch höheren Turmes abgesehen werden mußte. Mit den Mitteln, wie sie einem physikalischen Institut zur Verfügung stehen, sind derartige Versuche im großen Maßstabe eben nicht leicht durchführbar.

Jeder Versuch wurde so unternommen, daß zuerst von der niedrigsten Lage ausgegangen worden ist und allmählich die höchste Lage erreicht, dann wieder in denselben Zwischenstufen zu der ursprünglichen Ausgangsstellung zurückgekehrt wurde.

Es wurde davon abgesehen, alle Ausschläge auf einen gemeinschaftlichen Maßstab zurückzuführen, da nicht alle Versuche miteinander gut vergleichbar sind. Wo dies angängig ist, ist es geschehen. Im nachfolgenden werden aber die jeweiligen Vorschaltwiderstände von dem Galvanometer angegeben und es sei bemerkt, daß der Ausschlag des Galvanometers sich bei vorgeschalteten 150 gegen 20 und 0 Ohm wie 1:4:24 verhält. Vor dem Standard waren jeweils 20 Ohm vorgeschaltet.

Von den vielen in der Dissertation mitgeteilten Tabellen, die alle das gleiche Resultat ergaben, daß *die Übertragung in größere Höhe über der Erde viel besser wird*, sollen hier nur drei typische Tabellen wiedergegeben werden. Die Versuche wurden zuerst mit zwischenliegenden Bäumen angestellt, später wurden dieselben abgehauen.

Tabelle 5.

Geber und Empfänger  gleichmäßig hoch.Entfernung 30 m, ohne Bäume. Vorgeschaltet 20 Ohm.
Trockenes Wetter, Frost.


Höhe über Erde	Hinweg		Rückweg			Hin- weg	Rück- weg
	Stand.	Empf.	Stand.	Empf.			
10 cm	93	68	—	—	Empfänger dividiert durch Standard	0,93	—
100	69	182	—	—		2,64	—
200	119	257	79	263		2,16	3,3
250	134	460	—	—		3,44	—
300	116	490	115	316		4,2	2,74
350	108	350	119	315		3,24	2,64
400	110	374	106	280		3,4	2,64
450	118	385	—	—		3,26	—

Tabelle 6.

Geber und Empfänger  gleichmäßig hoch.Entfernung 30 m, ohne Bäume. Vorgeschaltet 20 Ohm.
Trübes, feuchtes Wetter.

Höhe über Erde	Hinweg		Rückweg			Hin- weg	Rück- weg
	Stand.	Empf.	Stand.	Empf.			
10 cm	87	76	93	67	Empf. dividiert durch Standard	0,87	0,72
100	56	119	89	161		2,14	1,81
200	117	182	122	176		1,55	1,44
300	129	188	131	178		1,45	1,36
400	135	207	—	—		1,56	—

Tabelle 7.

Geber und Empfänger  gleichmäßig hoch.

Entfernung 30 m, ohne Bäume. Vorgeschaltet 0 Ohm.

Höhe über Erde	Standard	Empfänger	Empf./Stand.
150 cm	77	22	0,286
400	90	116	1,29
400	73	110	1,51
150	61	16	0,26

Der Vergleich der Tabb. 5 und 6 ergibt, daß die Erhebung über der Erde bei trockenem Erdboden eine stärkere Steigerung ergibt, als bei feuchtem. Ferner zeigt die Tab. 7, daß bei horizontalen Antennen die Erhebung über der Erde noch eine viel stärkere Steigerung ergibt, als bei vertikalen Antennen. Letzteres Resultat ist ohne weiteres klar, da horizontale Antennen durch Spiegelwirkung der Erde in ihrer Strahlung geschwächt werden, vertikale Antennen dagegen nicht. In genügender Höhe über der Erde wird daher die Wirkung der Horizontalantennen die der Vertikalantennen erreichen.

Daß auch bei Vertikalantennen die Wirkung mit Erhebung über der Erde ansteigt, muß an der elektrischen Leitfähigkeit der Erde liegen, demzufolge die elektromagnetische Energie absorbiert wird. Diese Absorption hängt, wie theoretisch leicht zu berechnen ist, von dem Verhältnis der Leitfähigkeit der Erde zur angewandten Wellenlänge ab und erreicht bei einem bestimmten endlichen Verhältnis ein Maximum. Wird die Wellenlänge sehr groß, so kann eine mäßig leitende Erde und vor allem das Seewasser schon die Rolle eines guten Leiters spielen und die Absorption dadurch klein werden. Es ist daher wohl möglich, daß bei den in der Praxis angewandten großen Wellenlängen eine Erhebung der Apparate über die Erde nicht soviel nützt, als bei der hier angewandten Wellenlänge von 31 m, abgesehen davon, daß aus praktischen Gründen diese Erhöhung der Apparate untunlich ist. Ja es ist sogar möglich, daß bei sehr großen Wellenlängen und gut leitendem Seewasser die Annäherung der Apparate an Erde günstig ist, da dann die Erdoberfläche wie eine gut leitende Metallfläche die elektromagnetische Energie fortleiten kann und eine Abnahme der Strahlungsintensität nach der ersten Potenz der Entfernung bewirken kann, während bei kurzen Wellen und schlechter Leitfähigkeit der Erde, d. h. in dem Falle, daß sie mehr die Rolle eines schlechten Isolators spielt, die Wirkung mit der zweiten Potenz der Entfernung abnimmt (vgl. unten p. 371). Bei sehr großen Wellenlängen und gut leitendem Seewasser wäre daher die Ansicht von Lecher¹⁾ vielleicht berechtigt, daß die Erde bei der Übertragung der elektro-

1) E. Lecher, Physik. Zeitschr. 4. p. 320. 1903.

magnetischen Energie eine wichtige und zwar günstige Rolle spielt, *bei kleinen Wellenlängen und festem Erdboden ist die Rolle der Erde aber nach meinen Versuchen nur eine ungünstige.* Ebenfalls ergab eine Annäherung der Apparate an eine Böschung des Erdbodens Verminderung der Wirkung.

Ferner ergaben die Versuche (in der Dissertation sind dafür Zahlentabellen gegeben), daß, wenn man *nur* den Geber über den Erdboden erhebt, kaum eine Steigerung der Wirkung zu bemerken ist, dagegen wohl, wenn man nur den Empfänger hebt. Die Erklärung hierfür dürfte darin zu suchen sein, daß der Geber in der Richtung seiner Achse überhaupt nicht strahlt. Ferner ergab sich das eigentümliche Resultat, daß der Standard bei etwa 1 m Erhebung des Gebers über der Erde ein deutliches Minimum anzeigte, was vielleicht durch die kombinierte Wirkung von Spiegelung und Absorption im Erdboden zu erklären ist. (Genauer ist dies in der Dissertation ausgeführt.)

Ich habe auch den Geber auf den 25 m hohen Instituts-turm aufgestellt, den Empfänger 3 m über der Erde, in 62 m Luftliniendistanz vom Geber. Es ergab sich eine sehr gute Wirkung, wiewohl deutlich geschwächt wegen der Neigung der Distanzlinie gegen die Äquatorebene des Gebers, in der die Strahlung ja theoretisch am stärksten sein muß.

Folgende Versuche beziehen sich auf die *Schirmwirkung von Personen, Drähten und des Gebäudes.*

Drei Personen, wovon die eine hoch gewachsen, stellten sich abwechselnd an den Geber und Empfänger. Das Mittel aus drei bis vier Ablesungen am Empfänger ergab nun folgendes:

Tabelle 8.

Keine Person in der Nähe	398	Standard wurde am Anfang zwischen durch einmal und am Schluß beobachtet u. ergab einen ziemlich konstanten Ausschlag
3 Personen am Geber	389	
3 Personen am Empfänger	338	
2 Personen am Empfänger; die größte fort . .	366	
Keine Person	391	
2 Personen am Empfänger	361	
Keine Person	397	

Es scheint hiernach der Empfänger durch die Nähe von Personen stärker beeinflusst zu werden, als der Geber. Dagegen

habe ich bei der Untersuchung der Schirmwirkung von Drähten einen derartigen Unterschied zwischen Geber und Empfänger nicht bemerken können.

Die Schirmwirkung eines Drahtes wurde durch nachstehende Versuche geprüft. Ein ca. 8 m langer Draht von 2 mm Durchmesser wurde in 0,85 m Entfernung vor bez. hinter dem Geber bez. Empfänger parallel zu den Antennen ausgespannt. Oben war der Draht an einer trockenen Holzplatte, die schräg über dem Gestell befestigt wurde, angebracht, so daß er als gänzlich vom Gestell isoliert angesehen werden konnte. Der Draht wurde nun einmal nur in die Erde gesteckt bez. an eine auf der Erde liegende Platte befestigt und in die Erde gesteckt, das andere Mal frei mit ca. 10 cm Abstand von der Erde hängen gelassen. Es wurde darauf geachtet, daß der ausgespannte Draht möglichst in einer Ebene mit den beiden Antennen zu hängen kam.

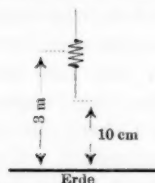


Tabelle 9.

Geber und Empfänger 3 m über Erde.

Entfernung 30 m.

Vorgeschaltet vor Empfänger 150 Ohm,
vor Standard 20 Ohm.


	Vor dem Geber			Hinter dem Geber			Vor dem Empfänger			Hinter dem Empfänger		
	Stand.	Empf.	E./St.	Stand.	Empf.	E./St.	Stand.	Empf.	E./St.	Stand.	Empf.	E./St.
Ohne Draht	87	151	1,74	94	150	1,6	89	160	1,8	92	158	1,72
Mit Draht freihängend	93	151	1,64	91	137	1,51	91	146	1,61	92	126	1,37
Mit einfach geerd. Draht	94	136	1,45	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Mit Draht an Platte und Erde	98	76	0,78	87	94	1,08	93	70	0,75	93	111	1,2

Ein für die Praxis wichtiges Resultat ist hier zunächst festzustellen, nämlich: *ein von der Erde isolierter Draht übt*

nur sehr geringen dämpfenden Einfluß.¹⁾ Dies kann u. a. bei Schiffsinstallationen von Wichtigkeit sein.

Ein ganz ähnliches Resultat wies folgender Versuch auf; das Holzgestell, auf dem die Apparate Aufstellung fanden, war, wie bereits erwähnt, mit vier seitlichen Schnüren befestigt. Benutzte man statt der Schnüre je vier Kupferdrähte von ca. 3 mm Durchmesser, so ergab sich folgendes:

Tabelle 10.

Geber und Empfänger  1 m über Erde.

Entfernung 30 m. Vorgeschaltet 20 Ohm.

Drahtbefestigung in 3 m Höhe des Gestelles.

Mit Draht			Mit Schnur		
Standard	Empfänger	Empf./Stand.	Standard	Empfänger	Empf./Stand.
71	122	1,72	73	174	2,4

Der größere Einfluß des geerdeten Drahtes gegenüber dem ungeerdeten bez. des gut geerdeten gegenüber dem weniger gut geerdeten ist wohl darauf zurückzuführen, daß durch die Erdverbindung die Eigenschwingung des Drahtes langsamer wird und so der Resonanz mit dem Geber genähert wird. Im übrigen aber kann auch aus diesem Versuch die Vieldeutigkeit des Begriffes „Erdung“ entnommen werden. Die einzelnen Kolumnen der Tab. 9 sind Mittelwerte aus mehreren hintereinander gemachten Versuchsreihen. Es hat sich dabei gezeigt, daß bei geerdetem Draht Ablesungsdifferenzen bis zu 100 Proz. festzustellen waren, während bei freihängendem Draht die einzelnen Ablesungen nur um 3 Proz. differierten.

Welch großer Unterschied ist ferner zwischen den Ablesungen in der Horizontalreihe 3 und 4 der Kolumne I!

Wurden die bisherigen Versuche so gemacht, daß Geber und Empfänger parallel zum Gebäude verliefen, so sollte nun auch durch einen Versuch festgestellt werden, welche Schirm-

1) Wenn der Draht in Resonanz steht, so verhält sich die Sache natürlich anders. Vgl. J. Zennecks Versuche. Phys. Ztschr. 4, p. 363. 1903.

wirkung bez. Reflexion das Gebäude selbst ausübt. Dazu wurde die Distanzlinie Geber-Empfänger senkrecht zum Gebäude gerichtet, die Apparate in 50 m Distanz voneinander aufgestellt, aber in verschiedenem Abstand vom Gebäude. a bezeichnet den Abstand des Gebers vom Gebäude.

Tabelle 11.

Geber und Empfänger 3 m über Erde.

Vorgeschaltet 20 Ohm.

a	Standard	Empfänger	Empf./Stand.
20 m	84	177	2,10
130 cm	93	162	1,74
25 cm	67	101	1,5

Die Versuche sind bei andauerndem sehr starken Regen gemacht worden.

Aus diesem Versuch ist der störende Einfluß von Gebäuden deutlich erkennbar, d. h. ihre durch Reflexion wirkende Abschirmung nach vorn.

Die Beugung habe ich im folgenden (Fig. 3) untersucht.

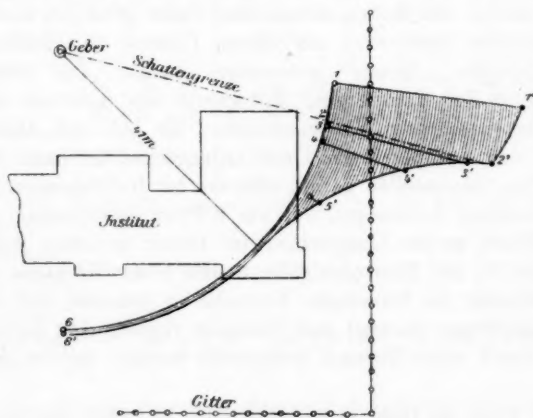


Fig. 3.

Der Geber blieb während der Versuche ständig auf demselben Platze und mit dem Empfänger ging ich um das Institutsgebäude in einem Kreise, vom Radius 41 m, herum. Diejenigen Stellen, an denen der Empfänger bei dem Versuch Aufstellung fand, sind mit den Zahlen 1 bis 6 bezeichnet. Die relative Größe der jeweiligen Ausschläge ist auf der Verlängerung desjenigen Halbmessers, der durch den untersuchten Punkt gezogen ist, vom Kreise ab aufgetragen. Die entsprechenden Ausschläge sind also 1—1', 2—2' etc. Der Punkt 5 konnte nicht genau auf dem Kreisumfange genommen werden, die Größe des Ausschlages in diesem Punkte zählt aber auch vom Kreisumfange an.

Es ist bemerkenswert, wie die Ausschläge sich an der Schattengrenze verhalten und daß es gelang, eine *Wirkung wahrzunehmen, als selbst das ganze Institutsgebäude zwischen Geber und Empfänger stand.*

Um übrigens sicher zu gehen, daß die Verbindungsleitungen zum Induktor einerseits und dem Empfänger andererseits nicht etwa die Träger der Energie waren, wurden auch mehrere Ablesungen mit der dicht am Geber stehenden Batterie unter Weglassung des zum Induktor führenden Drahtes gemacht und sie ergaben fast identische Ablesungen wie bei Anwendung des Drahtes.

Zu erwähnen wäre hier noch, daß, als ich einen der Apparate im Zimmer aufgestellt und den anderen im Freien gelassen hatte, ich einen Ausschlag am Empfänger überhaupt nicht feststellen konnte. Daher ist der Ausschlag bei der Aufstellung 6 in Fig. 3 so zu deuten, daß nicht *durch* das Gebäude, sondern *durch* Beugung *um* das Gebäude herum die elektromagnetische Strahlung sich fortgepflanzt hat.

Erwähnenswert ist auch nachstehender Versuch: Das Gestell, auf welchem die Apparate Aufstellung gefunden haben, ist ganz mit Reif bedeckt gewesen, der unter dem Einfluß der Sonne geschmolzen ist. Die Platte eines jeden der Apparate lag nun auf einem Brett direkt und es ergab sich gewissermaßen von selbst, daß geprüft wurde, welchen Einfluß eine eventuelle Isolation der Platte haben mußte. Es wurde daher die Platte einmal direkt auf das nasse Brett, ein anderes Mal

auf einen ca. 5 cm dicken Paraffinklotz gelegt. Die Apparate standen 1 m über Erde bei 30 m Entfernung.

Das Mittel aus je 6 Ablesungen ergab:

Tabelle 12.

Geber und Empfänger		Vorgeschaltet 20 Ohm
Ohne Isolation	Mit Isolation	
222		
170		255
195		215
192		225

Der Grund der höheren Ablesungen bei isolierten Platten kann entweder an der schwächeren Dämpfung, oder auch an der Störung der Resonanz durch Vergrößerung der Kapazität der Platten infolge Erdverbindung liegen.¹⁾ *Es empfiehlt sich daher, alle Teile der Apparate für drahtlose Telegraphie möglichst gut gegen Erde zu isolieren.*

Zum Schluß sei noch eine Reihe von Versuchen erwähnt aus welcher der *Einfluß der Entfernung* ersichtlich ist. Bei diesem Versuch blieb der Geber stets auf seinem Platze stehen und nur der Empfänger wurde verstellt, da aber Bäume noch auf dem Platze standen, so können die Versuche nicht als absolut rein gelten.

Die Versuchsreihe der Tab. 12 deutet darauf, daß der *Integraleffekt* der Übertragung ziemlich genau mit dem Quadrate der Entfernung abnimmt. Auch andere ähnliche Versuche ergaben das gleiche Resultat, trotzdem sind sie nur mit Vorsicht zu gebrauchen, da bei den relativ geringen Entfernungen, die zur Verfügung standen, *absolut* reine Versuche nicht auszuführen waren. Bei einigen Versuchen mußte der Geber ziemlich nahe an das Universitätsgebäude herangerückt werden.

1) Ich finde übrigens bei Prasch, „Fortschritte auf dem Gebiete der drahtlosen Telegraphie“, daß der französische Korvettenkapitän Tissot das gleiche Resultat gefunden hat. Leider konnte ich mir, mangels irgendwelcher Literaturhinweise im zit. Buch die Originalarbeit von T. nicht verschaffen.

Tabelle 13.

Empfänger und Geber  in ca. 50 cm Höhe.

Vorgeschaltet 20 Ohm.

24 m		18 m		16 m		14 m		12 m		14 m		16 m		18 m	
Stand.	Empf.	Stand.	Empf.	Stand.	Empf.	Stand.	Empf.	Stand.	Empf.	Stand.	Empf.	Stand.	Empf.	Stand.	Empf.
478	111	406	181	415	240	421	290	396	354	400	308	400	246	384	182
Empfänger dividiert durch Standard															
0,23		0,45		0,58		0,69		0,88		0,77		0,61		0,47	
Empfänger/Standard $\times r^2$															
132,48		145,80		148,48		135,24		126,72		150,92		156,16		152,28	
Empfänger $\times r^2$															
63936		58644		61440		56840		50976		60368		62976		58968	

Dies hier gewonnene Resultat kann aber aus dem oben p. 364 erwähnten Grunde bei langen Wellen, besonders wenn über Meerwasser telegraphiert wird, anders ausfallen, indem die Wirkung dort vielleicht nur mit der ersten Potenz der Entfernung abnimmt.¹⁾

Zusammenfassung der Resultate.

1. Die Erdoberfläche wirkt bei Wellen von 31 m Länge wie ein stark absorbierendes und schwach reflektierendes Medium (p. 364).

2. Der Ersatz einer Kapazität durch Erdverbindung benachteiligt die Übertragung in ganz hohem Maße (p. 361).

3. Die Isolation der Apparate gegen Erde wirkt auf die Übertragung günstig (p. 370).

Es ist daher (mindestens bei kurzen Wellen) empfehlenswert, mit gut gegen Erde isolierten Apparaten möglichst hoch über Erde zu gehen, ohne jede Erdverbindung.

1) Diese Ansicht hat Hr. Graf Arco brieflich P. Drude mitgeteilt und obwohl quantitative Versuche hierüber wohl noch nicht angestellt sind, ist die Ansicht doch plausibel.

4. Belaubte Bäume absorbieren und reflektieren elektrische Wellen. Stehen sie zwischen den Apparaten, so können sie die Übertragung schwächen, stehen sie hinter den Apparaten, so können sie unter Umständen das Resultat durch Bildung stehender Wellen verstärken (p. 360).

5. Die Wickelung beim gekoppelten System soll in einer Ebene senkrecht zur Antenne verlaufen (p. 359).

6. Das Strahlungsvermögen eines Systems mit je zwei Antennen ist etwa 3—4 mal so stark als dasjenige mit nur einer Antenne und einer Kapazität (p. 360).

7. Drähte, welche senkrecht zur Antenne und zur Verbindungslinie Geber—Empfänger liegen, üben auf die Übertragung keinen Einfluß aus (p. 357).

Liegen die Drähte in der Verbindungslinie Geber—Empfänger, so verstärken sie etwas die Übertragung (p. 357).

8. Ein parallel zur Antenne laufender Draht schirmt die Wirkung um so mehr ab, je besser er geerdet ist (p. 366).

Ein ungeerdeter paralleler Draht übt nur geringen abschwächenden Einfluß aus (p. 366).

Ist man daher gezwungen, in der Nähe hoher Maste etc. Apparate für drahtlose Telegraphie anzubringen, so empfiehlt es sich, erstere gegen Erde zu isolieren und Resonanz des Drahtes mit den benutzten Wellen möglichst stark zu verhüten.

9. Den Effekt der Beugung sieht man in Fig. 3 (p. 368).

10. Der *Integraleffekt* der Übertragung nimmt bei $\lambda = 30$ m mit dem Quadrate der Entfernung ab (p. 371).

11. Mit Hilfe der von Drude aufgestellten Methode läßt sich rasch und sicher die Konstruktion abgestimmter magnetisch gekoppelter Sender bez. Empfänger berechnen (p. 350ff.).

(Eingegangen 23. August 1905.)

6. *Elektrische Leitungsfähigkeit und Reflexionsvermögen der Kohle;*
von E. Aschkinass.

1. Schon vor längerer Zeit hatte ich im Anschlusse an frühere Untersuchungen¹⁾ im ultraroten Spektralgebiete einige Beobachtungen über das Reflexionsvermögen polierter Kohlenstücke ausgeführt. Dabei hatte sich bereits gezeigt, daß die Reflexionswerte schon bei mäßig großen Wellenlängen auffallend hohe Beträge erreichen. Die Versuche konnten jedoch damals nicht zu Ende geführt werden, so daß eine Mitteilung jener Resultate bisher nicht erfolgt ist. Im Hinblick auf die inzwischen von den Herren Hagen und Rubens²⁾ aufgefundene einfache Beziehung zwischen der elektrischen Leitungsfähigkeit der Metalle und ihrem Reflexionsvermögen für ultrarote Strahlen schienen mir aber meine früheren Beobachtungen über die Reflexion der Kohle ein erneutes Interesse zu bieten, so daß ich die Versuche in diesem Sommer wieder aufgenommen und in vielfacher Hinsicht vervollständigt habe.

Bezeichnet R das prozentische Reflexionsvermögen eines Metalles für Strahlen einer bestimmten Wellenlänge λ (1μ als Einheit von λ angenommen) und w seinen spezifischen Widerstand (= Widerstand eines Drahtes von 1 m Länge und 1 qmm Querschnitt in Ohm), so gilt nach Hagen und Rubens für hinreichend große Werte von λ die Beziehung

$$(1) \quad 100 - R = \frac{36,5 \sqrt{w}}{\sqrt{\lambda}}.$$

Diese Gesetzmäßigkeit ergibt sich, wie aus den theoretischen Untersuchungen der Herren Drude³⁾, Cohn⁴⁾ und Planck⁵⁾

1) E. Aschkinass, Ann. d. Phys. 1. p. 42. 1900.

2) E. Hagen u. H. Rubens, Ann. d. Phys. 11. p. 873. 1903.

3) P. Drude, Physik des Äthers p. 574. 1894; Verh. d. Deutschen Physik. Gesellsch. 5. p. 142. 1903.

4) E. Cohn, Das elektromagnetische Feld p. 444. 1900.

5) M. Planck, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 1903. p. 278.

hervorgeht, als notwendige Konsequenz aus der elektromagnetischen Theorie des Lichtes.

2. Es existieren nun neben den Metallen selbst noch gewisse andere Substanzen, die den elektrischen Strom metallisch leiten. Unter diesen stehen gewisse Kohlensorten wegen der geringen Größe ihrer spezifischen Widerstände den Metallen besonders nahe. Es erschien daher wohl möglich, daß auch für das Reflexionsvermögen der Kohle in gewissen Spektralgebieten ihre elektrische Leitfähigkeit maßgebend sein würde.¹⁾ Die oben genannte Gleichung (1) gilt freilich nach den Entwicklungen von Planck²⁾ nur unter der Bedingung, daß das Produkt aus der im absoluten elektrostatischen Maße gemessenen Leitfähigkeit Λ und der Zeitdauer τ der in Frage kommenden elektromagnetischen Schwingungen groß gegen Eins ist. Es ist aber

$$\Lambda \tau = 30 \frac{\lambda}{w}.$$

Der Ausdruck $30(\lambda/w)$ muß also groß gegen Eins sein. In dem uns bisher zugänglichen Gebiete des von einer Wärmequelle emittierten ultraroten Spektrums wird diese Bedingung von der Kohle noch nicht gut erfüllt. Für eine schon recht stark leitende Kohle wäre z. B. $w = 50$ zu setzen; jenes Produkt besäße dann selbst bei $\lambda = 50 \mu$ erst den Wert 30.

Wenn wir jedoch das Gebiet der Hertzischen Wellen in Betracht ziehen, deren Längen etwa mehrere Zentimeter betragen mögen, so wird die Größe $30(\lambda/w)$ einen genügend hohen Wert erreichen, um die Anwendung der Formel (1) zuzulassen. In diesem Falle müßte daher auch für mäßig gut leitende Kohlen ein Reflexionsvermögen von nahezu 100 Proz. vorhanden sein. Der Versuch zeigte, daß dies in der Tat der Fall ist, daß sich also die im sichtbaren Spektralgebiete als

1) Von J. Königsberger (Phys. Zeitschr. 4. p. 495. 1903) wurde bereits die Absorption und Reflexion von Metallsulfiden und -oxyden im ultraroten Spektrum untersucht. Es zeigte sich jedoch hierbei kein deutlicher Zusammenhang mit dem elektrischen Leitungsvermögen; die spezifischen Widerstände dieser Substanzen sind übrigens im allgemeinen sehr viel größer als diejenigen der gut leitenden Kohlen.

2) M. Planck, l. c.

typisch schwarz bekannte *Kohle gegen Hertz'sche Wellen wie ein blankes Metall verhält.*

3. Als Strahlungsquelle diente ein linearer Erreger aus zwei, je 12 mm langen Messingstiften. Vor diesem Primärleiter stand eine Petroleumlinse, durch welche die Strahlen nahezu parallel gerichtet wurden. Als Empfänger wurde ein im Fokus eines Hohlspiegels befestigter Resonator mit Klemmchen'schem Thermoelement, das an ein hochempfindliches Panzergalvanometer angeschlossen war, benutzt. Die Wellenlänge der Eigenschwingung dieses Resonators war gelegentlich einer früheren Untersuchung¹⁾ zu 90 mm bestimmt worden. Der Empfänger stand neben dem Erreger, so daß die Hertz'schen Wellen ihn nur erreichen konnten, wenn sie vorher eine Reflexion erfahren hatten. Der Reflexionswinkel betrug bei diesen, sowie bei allen noch zu beschreibenden Versuchen stets etwa 20° . Die ersten Messungen wurden an Gaskohle, wie sie als Elektrode in galvanischen Elementen benutzt wird, angestellt. Zwölf solcher Kohlenstücke wurden auf eine Glas-scheibe aufgekittet, so daß eine 30×40 cm große Platte entstand, deren Vorderseite alsdann eben abgeschliffen wurde. Da die Kohlen einzeln vorher nicht bearbeitet waren, besaß der Reflektor an den Stoßfugen Stellen von geringerer Reflexionsfähigkeit, so daß die zurückgeworfene Gesamtintensität bei diesen ersten Versuchen ein wenig zu klein erscheinen mußte. Es wurde nun stets alternierend die von der Kohle und andererseits die von einem der Kohlenplatte gleich großen, auf Glas aufgeklebten Stanniolplatte reflektierte Strahlung gemessen; Stanniol besitzt ja wie alle Metalle für diese Wellen ein Reflexionsvermögen von 100 Proz. Es war dafür gesorgt, daß die beiden miteinander zu vergleichenden Reflektoren in allen Fällen die gleiche Stellung zum Erreger einnahmen.

Aus einem der Kohlenstücke war ein Stäbchen herausgeschnitten worden, an dem die elektrische Leitungsfähigkeit des Materials bestimmt wurde. Dem Stäbchen wurde durch Schleifen ein durchweg quadratischer Querschnitt erteilt und die Messungen ergaben einen spezifischen Widerstand $w = 75,8$. Demgemäß berechnet sich nach Formel (1) das Reflexions-

1) E. Aschkinass u. Cl. Schaefer, Ann. d. Phys. 5. p. 489. 1901.

vermögen R für $\lambda = 9 \cdot 10^4 \mu$ zu 98,9 Proz. Die Beobachtungen lieferten im Mittel den Wert $R = 94$. Die Differenz zwischen Rechnung und Beobachtung ist im Hinblick auf den oben bezeichneten systematischen Fehler ohne Belang.

Ich untersuchte hierauf noch anderes Kohlenmaterial, das mir von der Firma Gebr. Siemens & Co. (Charlottenburg) in entgegenkommendster Weise zur Verfügung gestellt wurde. Von ihrem als Marke 166 bezeichneten Fabrikate erhielt ich eine massive, 20×30 cm große Platte. Für diese wurden die genauesten Messungen ausgeführt; sie wurde ebenfalls auf einer Seite plan geschliffen. Für den spezifischen Widerstand dieses Materials lieferten meine Messungen den Wert 114. Hieraus folgt nach Formel (1) $R = 98,7$, während eine längere Beobachtungsreihe als Mittelwert $R = 98,3$ ergab (mit einem mittleren Fehler von 1 Proz.).

Man kann sich noch auf andere Weise davon überzeugen, daß solche gut leitenden Kohlen sich Hertzschen Wellen gegenüber wie Metalle verhalten. Es wurden auf eine Ebonitplatte eine Anzahl Bogenlampenkohlen (von je 7 mm Durchmesser und 35 cm Länge) in einem gegenseitigen Abstände von 14 mm parallel nebeneinander aufgekittet. Wird dieses System in der Weise in den Strahlengang eines Hertzschen Erregers gestellt, daß die Kohlenstäbe der Schwingungsrichtung der elektrischen Kraft parallel laufen, so wird kein merklicher Bruchteil der Strahlungsenergie hindurchgelassen, während bei gekreuzter Lage der Kohlenstäbe eine Schwächung der hindurchtretenden Wellen nicht zu bemerken ist. Das System verhält sich demnach völlig wie ein Hertzsches Drahtgitter.

Ein gleich wirksames Gitter erhält man auch, wenn man die Lampenkohlen durch Bleistifte¹⁾ ersetzt. Die letzteren können dabei sämtlich ohne Zwischenräume dicht nebeneinander angeordnet werden, da die Graphitkerne durch die Holzmäntel genügend weit voneinander getrennt bleiben.

4. Nachdem sich somit gezeigt hatte, daß die Reflexion der gut leitenden Kohle für Hertzsche Wellen tatsächlich eine ihrem Leitungsvermögen entsprechende Höhe erreicht,

1) Der spezifische Widerstand Faberscher Bleistifte beträgt nach Winkelmanns Handbuch der Physik (1. Aufl. Bd. III 1. p. 283) 952.

erschien es von Interesse, zu prüfen, inwieweit sich auch im ultraroten Spektrum einer Wärmequelle ein Einfluß der elektrischen Leitfähigkeit auf das Reflexionsvermögen bemerkbar machen würde. Ein solcher Einfluß war offenbar am ehesten für ultrarote Strahlen einer möglichst großen Wellenlänge zu erwarten. Aus dem oben erwähnten Grunde kann aber hier die Formel (1) nicht mehr anwendbar sein, vielmehr wird in diesen Spektralgebieten, wo $\Delta \tau$ nicht mehr groß gegen Eins ist, der Zusammenhang zwischen dem Reflexions- und Leitvermögen nach Planck (l. c.) durch die Beziehung

$$(2) \quad R = 100 \frac{\sqrt{4 \Delta^2 \tau^2 + 1} + 1 - \sqrt{2(\sqrt{4 \Delta^2 \tau^2 + 1} + 1)}}{\sqrt{4 \Delta^2 \tau^2 + 1} + 1 + \sqrt{2(\sqrt{4 \Delta^2 \tau^2 + 1} + 1)}}$$

dargestellt. Auch diese Gleichung kann aber, den Grundlagen der Theorie gemäß, nur in dem Falle erfüllt sein, daß ein Einfluß von Eigenschwingungen der Elementarteilchen des reflektierenden Körpers nicht in Betracht kommt.

5. Ich untersuchte zunächst die Reflexion für die Reststrahlen des Steinsalzes, die eine Wellenlänge von $51,2 \mu$ besitzen.¹⁾ Als Strahlungsquelle diente ein Auerscher Brenner ohne Zugglas. Bezüglich aller Einzelheiten der zu diesen und den folgenden Versuchen benutzten Meßmethode verweise ich lediglich auf die zuletzt zitierte Arbeit. Die Reflexion der verschiedenen Substanzen wurde dementsprechend stets mit derjenigen von Silber, für die ja jenseits 12μ $R = 100$ gesetzt werden darf, verglichen. Zu den Messungen wurden folgende Materialien herangezogen: Gaskohle — von derselben Art, wie sie in den Versuchen mit Hertzschen Wellen benutzt worden war —, ferner die Kohle der Marke 166 von Gebr. Siemens & Co., und außerdem als eine natürliche Kohle der Anthrazit.²⁾

Die letztgenannte Substanz besitzt von allen Mineralkohlen den höchsten Kohlenstoffgehalt. Nach den Angaben der Bezugsfirma (Anthrazitwerke Gustav Schulze, Berlin)

1) H. Rubens u. E. Aschkinass, Wied. Ann. 65. p. 241. 1898.

2) Andere Kohlenarten, die gleichfalls untersucht wurden, mögen in dieser Mitteilung unberücksichtigt bleiben, da die an ihnen gewonnenen Resultate ihrem Charakter nach mit den übrigen Ergebnissen durchaus übereinstimmen.

enthält der von mir benutzte englische Anthrazit 94 Proz. Kohlenstoff. Sämtliche Versuchsobjekte wurden möglichst sorgfältig geschliffen und poliert. Eine recht gute Politur ließ sich an der Gaskohle erzielen, während die Siemensschen Kohlen eine weniger vollkommene Oberflächenbeschaffenheit annahmen; hervorragend schön gelang die Politur des auffallend harten Anthrazits, doch war es nicht möglich, Stücke zu erhalten, die völlig frei von Sprüngen gewesen wären. Soweit daher die Resultate von Oberflächenfehlern beeinflusst worden sind, — dieser Einfluß dürfte bei den langen Wellen von $51,2 \mu$ noch kaum zur Geltung kommen, bei den später zu beschreibenden Messungen in Spektralgebieten geringerer Wellenlängen aber schon eher ins Gewicht fallen — wären die erhaltenen Reflexionszahlen als Minimalwerte zu betrachten. In allen *wesentlichen* Punkten bleiben indessen die gewonnenen Versuchsergebnisse von jenen Fehlern unberührt.

Es ergaben sich nun folgende Zahlen für die prozentischen Reflexionen bei $\lambda = 51,2 \mu$:

	<i>R</i>
Gaskohle	56,5
Siemenskohle Nr. 166	54,5
Anthrazit	13,8

Die beiden künstlichen Kohlenarten reflektieren also von diesen langwelligen ultraroten Strahlen noch über 50 Proz., d. h. etwa ebensoviel wie ein Goldspiegel im sichtbaren Spektralgebiete bei der Wellenlänge $0,6 \mu$.¹⁾ Es kann keinem Zweifel unterliegen, daß dieses starke Reflexionsvermögen durch die hohe Leitfähigkeit der Kohlen bedingt wird.

6. Da dieser Einfluß in dem zuletzt betrachteten Teile des ultraroten Spektrums demnach noch sehr lebhaft in die Erscheinung trat, so entschloß ich mich, die Untersuchung auf das ganze ultrarote Spektralgebiet auszudehnen. Durch viermalige Spiegelung an Flußspat erhält man eine Reststrahlung

1) E. Hagen u. H. Rubens, Ann. d. Phys. 8. p. 1. 1902.

von der mittleren Wellenlänge $\lambda = 26 \mu$. Für diese Strahlen waren die Reflexionswerte folgende:

	<i>R</i>
Gaskohle	49,5
Siemenskohle Nr. 166	41,1
Anthrazit	12,8

7. Ein weiterer begrenzter Spektralbezirk läßt sich durch mehrfache Reflexion an Quarzoberflächen isolieren. Ich benutzte vier Reflexionen und ließ die gesamte Strahlung, um die anderenfalls zugleich vorhandene Energie der Wellenlänge 21μ zu eliminieren, durch eine 5 mm dicke Flußspatplatte hindurchtreten. Bei dieser Anordnung besitzen die restierenden Strahlen eine mittlere Wellenlänge von $8,9 \mu$, für welche folgende Zahlen gefunden wurden:

	<i>R</i>
Gaskohle	34,8
Siemenskohle Nr. 166	29
Anthrazit	12,2

Da die Gaskohle sowie die Siemenssche Kohle somit selbst noch bei diesen relativ kurzen Wellen ein recht bedeutendes Reflexionsvermögen besitzen (der Wert $R = 35$ entspricht dem Reflexionsvermögen des Goldes für $\lambda = 0,47 \mu$), so schien es lohnend, wenigstens für die gut polierte Gaskohle, den Verlauf des Reflexionsvermögens auch noch für kürzere Wellen in einem prismatischen Spektrum von Punkt zu Punkt zu verfolgen. Es mußte ja schließlich ein stärkerer Abfall der R -Werte eintreten, da die Reflexion aller Kohlenarten, wie man sich schon mit bloßem Auge überzeugen kann, im sichtbaren Gebiete nur wenige Prozente beträgt.

8. Zunächst wurde zur Ermittlung der genauen Werte, die dem Reflexionsvermögen im sichtbaren Spektrum zukommen, innerhalb dessen natürlich eine merkliche Veränderlichkeit mit der Wellenlänge nicht mehr vorhanden ist, — auch die polierten Kohlen erscheinen ja tiefschwarz — auf optischem Wege

Messungen für Natronlicht ($\lambda = 0,589 \mu$) mit Hilfe eines Glanschen Spektralphotometers angestellt. Von dem Glühfaden einer Nernstlampe trafen die Lichtstrahlen, nachdem sie an einer Spiegelglasplatte eine Reflexion unter 45° erlitten hatten, die zu untersuchenden Reflektoren und gelangten von hier auf den Photometerspalt. Als Vergleichslicht diente ein Strahlenbündel desselben Glühfadens, das durch Reflexion an einer zweiten unter 45° geneigten Spiegelglasplatte auf die andere Spalthälfte geworfen wurde. Die Reflektoren bestanden wieder abwechselnd aus Kohle und aus Silber. Die Messungen lieferten demnach unmittelbar die Reflexionswerte der Kohlen relativ zu demjenigen des Silbers. Durch Multiplikation dieser Zahlen mit dem aus den Hagen-Rubensschen Messungen bekannten Reflexionsvermögen des Silbers für Natronlicht ergaben sich dann die folgenden absoluten Reflexionsgrößen R der Kohlen Spiegel:

	R
Gaskohle	4,4
(Siemenskohle Nr. 166 . . .	1,4)
Anthrazit	3,7

Die Zahl für die Siemenssche Kohle ist in Klammern eingeschlossen, da sie infolge der mangelhaften Oberflächenbeschaffenheit dieses Materials zweifellos erheblich zu klein ausgefallen ist.

9. Im weiteren Bereiche des roten und ultraroten Spektrums wurde nun noch die Reflexion der Gaskohle untersucht unter Benutzung eines Spiegelspektrometers, dessen Okularrohr mit einer Rubensschen linearen Thermosäule versehen war. Das Spektrum wurde mit Hilfe eines großen Flußspatprismas erzeugt, und als Strahlenquelle diente ein Linnemannscher Zirkonbrenner. Im Gebiete der kürzesten Wellen war zur Beseitigung der schädlichen diffusen Strahlung eine 1 cm dicke Wasserschicht dauernd in den Strahlengang eingeschaltet. Eine solche Wasserschicht läßt bekanntermaßen keine Strahlen jenseits $1,5 \mu$ hindurchtreten.¹⁾ Von der bisher benutzten Gas-

1) E. Aschkinass, Wied. Ann. 55. p. 401. 1895.

kohle wurde für die neuen Versuche ein kleineres Stück herausgesägt. Das letztere, sowie ein Silberspiegel wurden gegen je eine der beiden gleich großen Öffnungen eines Doppel-diaphragmas gekittet, das längs einer Schlittenführung vor dem Spektrometerspalte hin und her geschoben werden konnte, so daß die Strahlen alternierend auf einen der beiden Reflektoren auffielen. Die ganze Versuchsanordnung stimmte mit der in einer früheren Arbeit beschriebenen¹⁾ überein. Die unmittelbar beobachteten Reflexionsgrößen wurden wieder nach Maßgabe des Reflexionsvermögens des Silbers für die einzelnen Wellenlängen korrigiert.

λ	0,585	0,8	1	2	4	6	8
R	4,4	10,5	12,2	17,4	22,4	27,7	32,5

In obiger Tabelle ist von sämtlichen ausgeführten Beobachtungen nur eine beschränkte Anzahl wiedergegeben, da es mir hier nur darauf ankommt, den charakteristischen Verlauf der Reflexionskurve zu kennzeichnen.

10. Besonders bemerkenswert erscheint die Tatsache, daß die Reflexion der Gaskohle schon an der Grenze des sichtbaren Spektrums rapid ansteigt, um von nun an, wie die Gesamtheit unserer Versuche lehrt, durch das ganze Ultrarot hindurch bis ins Gebiet der Hertzschen Wellen stetig weiter zu wachsen. Ein derartiges Verhalten, daß eine optische Größe innerhalb eines so enormen Spektralbereiches eine regelmäßige, tatsächlich *beobachtbare* Veränderung erleidet, ist meines Wissens bisher noch in keinem Falle festgestellt worden. Allerdings nimmt auch das Reflexionsvermögen der Metalle in Wahrheit mit wachsender Wellenlänge immer weiter zu, doch entzieht sich dieses fortdauernde Anwachsen schon im äußersten Teile prismatischer Spektren der Beobachtung, da die Metallreflexionen sich hier bereits von der Zahl 100 Proz. praktisch nicht mehr unterscheiden lassen, und ebensowenig ist noch ein Unterschied gegenüber dem Verhalten gegen Hertzsche Wellen zu konstatieren. Das Reflexionsvermögen der Kohle muß dagegen selbst *innerhalb* des Bereiches der Hertzschen

1) E. Aschkinass, Ann. d. Phys. 1. p. 57. 1900.

Wellen noch eine wahrnehmbare Veränderlichkeit aufweisen. Ist z. B. der wahre Reflexionswert der Siemensschen Kohle für die von uns benutzten Wellen von 9 cm gemäß der Gleichung (1) 98,7 Proz., so beträgt er für die kürzesten der bisher beobachteten Wellen dieser Art von 4 mm Länge, nach derselben Formel berechnet, nur noch 93,8 Proz.

11. Ganz anders verhält sich aber der Anthrazit. Aus den mitgeteilten Zahlen ist zu ersehen, daß sein Reflexionsvermögen von $\lambda = 8,9 \mu$ bis $\lambda = 51,2 \mu$ eine relative Zunahme von nur 13 Proz. erfährt, während dasjenige der Gaskohle innerhalb derselben Grenzen relativ um 62 Proz. anwächst. Eine Ähnlichkeit zwischen den beiden Substanzen besteht nur insofern, als auch beim Anthrazit der Abfall zu dem im sichtbaren Gebiete gültigen R -Werte erst unmittelbar an der Grenze des ultraroten Spektrums erfolgt. Diese Tatsache wurde in der Weise erkannt, daß sein Reflexionsvermögen für die durch Glas filtrierte Gesamtemission eines Auerschen Brenners bestimmt wurde. Als maßgebende Wellenlängen kann man in diesem Falle mit genügender Annäherung die Werte $\lambda = 1$ bis 2μ betrachten, und es wurde hierfür die Zahl $R = 11$ Proz. beobachtet. Innerhalb des ganzen Spektralbereiches bis $51,2 \mu$ steigt die Reflexion des Anthrazits also nur um einen geringen Betrag, nämlich bis auf etwa 14 Proz. Dieser Umstand legte die Vermutung nahe, daß auch die elektrische Leitungsfähigkeit dieses Materials von einer geringeren Größenordnung als diejenige der Gaskohle wäre, und diese Erwartung hat sich denn auch in der Tat bestätigt.

An mehreren Anthrazitstäbchen von bestimmten Dimensionen wurden Widerstandsmessungen ausgeführt, aus denen sich für den spezifischen Widerstand der Wert $w = 2 \cdot 10^{10}$ ergab. Die Leitfähigkeit dieser Substanz besitzt demnach eine so geringe Größe, daß ein merklicher Einfluß derselben auf das Reflexionsvermögen selbst für die längsten Wellen nicht mehr erwartet werden kann. Im Einklange mit dieser Schlußfolgerung lieferten nunmehr auch weitere Messungen am Anthrazit für Hertz'sche Wellen von 9 cm Länge einen Reflexionswert $R = 14$ Proz., d. h. den gleichen Betrag, der zuvor für $\lambda = 51,2 \mu$ gewonnen worden war.

Der Anthrazit schien sich mithin Hertz'schen Wellen

gegenüber wie ein Dielektrikum zu verhalten. Dann war aber vorauszusehen, daß er auch eine erhebliche Durchlässigkeit für die Strahlen elektrischer Kraft besitzen würde, und dies bestätigten auch die Versuche. Bei Einschaltung einer Anthrazitplatte in den Strahlengang trat nämlich nur eine Intensitätsschwächung von solcher Größe ein, wie sie dem Verluste durch Reflexion allein entsprach.

Unter diesen Umständen kann man nun aber aus dem Reflexionsvermögen nach der Fresnelschen Formel

$$\frac{R}{100} = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2$$

den Brechungsexponenten n des Anthrazits für $\lambda = 9$ cm berechnen. Auf diese Weise ergibt sich im vorliegenden Falle $n = 2,2$.

Bekanntlich findet sich der Kohlenstoff in der Natur in seiner reinsten Form kristallisiert als Diamant vor, der in elektrischer Beziehung zu den Nichtleitern gehört. Auch der Anthrazit zeichnet sich, wie bereits bemerkt wurde, durch einen sehr hohen Gehalt an Kohlenstoff aus und nach unseren Beobachtungen ist sein Leitvermögen außerordentlich gering. Dem Diamant steht er auch insofern nahe, als sein Härtegrad recht bedeutend ist. Da der optische Brechungsexponent des Diamanten 2,4 beträgt, und da er im ultraroten Spektralgebiete wohl kaum eine Stelle anomaler Dispersion besitzen dürfte, so erscheint es naheliegend, zu vermuten, daß der oben für Anthrazit ermittelte Wert von n auch dem Diamanten zukommen werde. In der Tat beträgt die Dielektrizitätskonstante des Diamants 5,5¹⁾, woraus sich $n_{\infty} = 2,3$ ergibt.

Wie ich mich durch Benutzung der Methode der vielfachen Reflexionen überzeugte²⁾, besitzt der Anthrazit im ultraroten Spektrum keine Eigenschwingungen. Um so auffälliger erscheint es in Anbetracht seiner geringen elektrischen Leitfähigkeit, daß sein Reflexionsvermögen vom sichtbaren Spektrum an bis zu $\lambda = 51,2\mu$ mit wachsender Wellenlänge stetig zunimmt. Ein derartiges Verhalten ist offenbar theoretisch schwer zu deuten. Man könnte zunächst versucht

1) W. Schmidt, Ann. d. Phys. 11. p. 118. 1903.

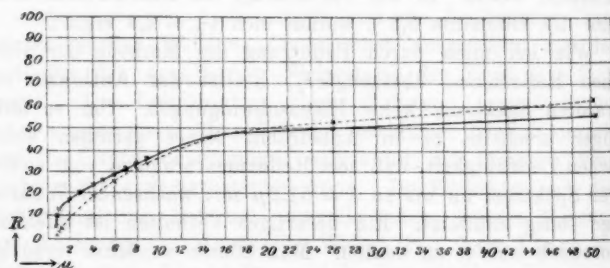
2) Vgl. E. Aschkinass, Ann. d. Phys. 1. p. 46 u. ff. 1900.

sein, diesen eigenartigen Verlauf auf Unvollkommenheiten der reflektierenden Oberflächen zurückzuführen, da solche Fehler ja die Reflexionswerte um so stärker herabdrücken, je kleiner die Wellenlänge wird. Die in Frage kommenden Differenzen sind aber viel zu groß, als daß sie auf diese Weise erklärt werden könnten, zumal die Beobachtungen an verschiedenen Stücken des Materials stets die gleichen Resultate lieferten. Vor allem spricht aber der steile Abfall der Reflexionskurve an der Grenze des sichtbaren Spektralgebietes gegen jene Deutungsweise.

12. In der folgenden Tabelle sind meine sämtlichen Beobachtungen noch einmal übersichtlich zusammengestellt und die ausgezogene Kurve der Figur soll den Verlauf der für Gaskohle gewonnenen Reflexionswerte zwischen 0,589 und 51,2 μ graphisch veranschaulichen.

		w	R													
			$\lambda=0,589$	0,8	1,0	2,0	4,0	6,0	8,0	8,9	28	51,2	$9 \cdot 10^4 \mu$			
Gaskohle	{beob.	{ 75,8	4,4	10,5	12,2	17,4	22,4	27,7	32,5	34,8	49,5	56,5	(94)			
	{ber.		1,3	2,2	3,3	9,0	19,0	26,3	31,7	33,7	53,3	64,1	98,9			
Siemens- kohle	{beob.	{ 114	(1,4)	—	—	—	—	—	—	29	41,1	54,5	98,3			
	{ber.		—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	98,7			
Anthrazit, beob.		$2 \cdot 10^{10}$	3,7	—	—	—	—	—	—	12,2	12,8	13,8	14			

Bei der Gaskohle ($w = 75,8$) habe ich auch für alle Wellenlängen die Größe von R nach der theoretischen Formel (2)



berechnet; die berechneten Werte sind in der Figur durch die gestrichelte Kurve dargestellt. Im großen und ganzen wird

man die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung als wohl befriedigend bezeichnen dürfen. Es muß dahingestellt bleiben, worauf die noch vorhandenen Differenzen zurückzuführen sind. Zum Teil mag wohl ein Einfluß der dem ultravioletten Spektralgebiete angehörigen Eigenschwingungen in Frage kommen; vielleicht spielen auch Inhomogenitäten des Materials eine gewisse Rolle.

13. Jedenfalls geht aber aus der Gesamtheit der Beobachtungen zur Genüge hervor, daß das Reflexionsvermögen der Kohle fast im ganzen Spektrum so gut wie ausschließlich durch die elektrische Leitungsfähigkeit bestimmt wird. Es ergibt sich ferner, daß die leitenden Kohlen im ultraroten Gebiete gar keine Ähnlichkeit mehr mit einem schwarzen, noch auch mit einem „grauen“ Körper besitzen. Diese Tatsache dürfte wohl auch für die Frage der Ökonomie gewisser Lichtquellen nicht ohne Bedeutung sein. In den Leuchtflammen spielt die Reflexion freilich kaum eine Rolle, da sich die Kohle hier in außerordentlich fein verteiltem Zustande befindet. Anders ist es aber vielleicht schon beim Kohlenbogenlicht — wenn die Erscheinungen auch in diesem Falle durch den Einfluß der Verbrennung wieder modifiziert werden mögen —, und vor allem bei der Kohlenfadenglühlampe. Bei dieser muß die Reflexion zweifellos eine wichtige Rolle spielen, und da erscheint es günstig, daß sie, wie sich gezeigt hat, unmittelbar hinter dem sichtbaren Spektralgebiete zu immer höheren Werten ansteigt.

In einer kürzlich erschienenen Abhandlung habe ich des näheren ausgeführt¹⁾, daß die Gesetze der Wärmeemission blanker Metalle in weitem Umfange durch ihr elektrisches Leitungsvermögen bestimmt werden, und daß u. a. die Metalle mit steigender Temperatur im ultraroten Spektrum immer schwärzer werden, da sie einen positiven Temperaturkoeffizienten ihres Widerstandes besitzen. Im Gegensatz hierzu nimmt nun der Widerstand der Kohle bekanntlich mit wachsender Temperatur ab. Soweit ihre Reflexion also von der Leitfähigkeit abhängt, wird sie um so größer werden, je höher die Temperatur steigt; die Kohle wird also im Ultrarot mit wachsender Temperatur immer

1) E. Aschkinass, Ann. d. Phys. 17. p. 960. 1905.

blanker. Infolgedessen wird der relative Anteil der unsichtbaren Strahlungsenergie in der Gesamtemission eines Kohlefadens bei hoher Temperatur wahrscheinlich noch erheblich geringer ausfallen, als man nach dem Resultate der bei Zimmertemperatur ausgeführten Reflexionsmessungen an und für sich zu erwarten hätte. Voraussichtlich steigt also mit wachsender Temperatur die Ökonomie einer solchen Lichtquelle in noch viel stärkerem Maße als die eines absolut schwarzen Körpers.

Ferner müßte sich beim Vergleich der Emissionen eines Metalles und einer gleich temperierten Kohle zeigen, daß bei langen Wellen und hohen Temperaturen die Strahlung der letzteren die des Metalles bei weitem nicht in so hohem Grade übertrifft, wie innerhalb des sichtbaren Spektralbereiches. Man sieht aber ohne weiteres ein, daß für die Wärmeemission der Kohle viel kompliziertere Strahlungsgesetze gelten werden als für schwarze oder für metallische Körper.

Charlottenburg, Physik. Inst. der Techn. Hochschule,
August 1905.

(Eingegangen 11. September 1905.)

**7. *Über Flüssigkeitsbewegungen, welche durch Rotation fester Körper verursacht werden;*
von A. L. Holz.**

Auf die Analogie der Wirbelbewegungen des Wassers mit den elektromagnetischen Wirkungen elektrischer Ströme hat H. v. Helmholtz in seiner Untersuchung: „Über die Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen“¹⁾ zuerst hingewiesen und die Gesetze entwickelt, welchen die geradlinigen und kreisförmigen Wirbeläden unterworfen sind.

Die hieraus gewonnenen Resultate schienen mir für die Kenntnis der mechanischen Vorgänge, die zunächst bei magnetischen Anziehungskräften stattfinden, von solcher Bedeutung, daß ich eingehende Versuche über Wirbelbewegungen angestellt habe und zu dem Ergebnis gelangt bin, daß durch Rotation fester Körper, welche zur Lösung meiner Aufgabe in geeigneten Formen angewendet wurden, ähnliche Wirbelfiguren erzeugt werden können, wie uns solche an den Kraftlinien der stab- und kugelförmigen Magnete bekannt sind. Man nimmt an, daß diese Kraftlinien aus dem Nordpol eines Stabmagneten heraustreten und symmetrisch im Bogen nach dem Südpol hinziehen, von diesem durch die magnetische Achse den Nordpol erreichen, um aus demselben sich wieder nach dem Außenraum zu bewegen; in diesem Sinne wird die Bewegung der Kraftlinien so lange fortgesetzt, bis sie durch geeignete Kräfte geändert oder vernichtet wird.

Durch die in vorliegender Mitteilung beschriebenen Versuche kann man eine Bewegung der Wasserteilchen herstellen, die eine ähnliche Wirbelform erzeugt, wie sie die magnetischen

1) H. v. Helmholtz, Wissenschaftliche Abhandlungen 1. p. 101.

Kurven besitzen, wobei wir jedoch, wenn wir eine Verwandtschaft beider Formen annehmen, berücksichtigen müssen, daß einige Begleiterscheinungen, die nur bei unseren Versuchen und nicht an magnetischen Kurven gefunden werden, in unserer Versuchsanordnung ihren Grund haben und zwar in erster Reihe in der Form des angewendeten Apparates und der von festen Wänden eingeschlossenen Flüssigkeit, während die magnetischen Kraftlinien in einem unbegrenzten Raum im Äther erzeugt werden, der alle Körper zu durchfließen imstande ist; ziehen wir noch den Einfluß der Schwere des Wassers und den des Luftdruckes auf dasselbe in Betracht, dann wird die Ursache der Verschiedenheit beider Erscheinungen zum großen Teil in der Verschiedenheit der beiden Materien zu suchen sein.

Das Ergebnis der Untersuchung ist folgendes:

1. Findet in einer Flüssigkeit die Rotation einer Kreislplatte um ihre Achse statt, die senkrecht zur Kreisebene steht, so bewegen sich die Flüssigkeitsteilchen oberhalb wie unterhalb der Platte vertikal zu ihrer Ebene hin; es steht deshalb die Bewegungsrichtung der Flüssigkeit senkrecht zur Ebene der rotierenden Platte und allgemein bei allen zur Untersuchung angewendeten Körpern, auch senkrecht zur Ebene der mit ihr parallel liegenden Flächenteilchen rotierender Körper.

2. Wird ein geeigneter Hohlkörper in einer Flüssigkeit in Rotation versetzt, so ziehen bei einer bestimmten Richtung der Rotation die Teilchen der Flüssigkeit von oben hinein und in Richtung der Rotationsachse von unten heraus, um im Bogen um den Körper an die obere Öffnung desselben zu gelangen; kehrt man nur die Rotationsrichtung des Körpers um, so findet auch die Bewegungsrichtung der Wasserteilchen im entgegengesetzten Sinne statt, es strömen dann die Teilchen von unten in den Rotationskörper hinein und ziehen durch die Achse von oben heraus.

3. Während der Rotation der angewendeten Hohlkörper zeigen die in Bewegung befindlichen Wasserteilchen das Bestreben, nach dem Mittelpunkt der Rotationsachse des rotierenden Körpers hinzuziehen, wodurch eine radiale Strömung der Flüssigkeitsteilchen erzeugt wird. Die an die Rotationsachse hinströmende Flüssigkeit besteht aus den Wirbelfäden, die sich

um die Wirbelachse spiralförmig herumbewegen und bei fortgesetzter Rotation einen Kreislauf vollziehen; ein Teil der heranströmenden Wirbelfäden wird von den festen Teilen des Rotationskörpers aufgefangen und ihrer Fortbewegung zur Rotationsachse zu gelangen, Widerstand geleistet; diese abgestoßenen Flüssigkeitsteilchen bewegen sich in Richtung der Rotation entweder auf- oder abwärts vor dem Außenraum des Rotationskörpers und ziehen bei fortgesetzter Rotation im Bogen herum, als wären sie auf dem Wege durch die Rotationsachse aus einem Pol herausgekommen. Dieser Vorgang lehrt, daß fortdauernd Flüssigkeitsteilchen nach einem Rotationszentrum hinstromen können, ohne eine Überfüllung an demselben zu verursachen.

4. Die durch Rotation bewegte Flüssigkeit bildet rings um den Rotationskörper einen Wirbel, dessen Achse durch das Innere des Rotationskörpers läuft; die Fäden, aus welchen dieser Wirbel besteht, bewegen sich in Ebenen, die senkrecht zur Rotationsrichtung des rotierenden Körpers stehen. Bringt man in die Teile der Flüssigkeit, welche an den Rotationskörper heranströmt, rings um denselben an dünnen Fäden hängende Körperchen, so werden, wie vorausszusehen ist, letztere in radialer Richtung an den rotierenden Körper hingezogen.

Zu diesen Untersuchungen benutzte ich ein dem Zimmeraquarium ähnliches Wasserbecken, dessen vier Wände aus 60 cm breiten und 40 cm hohen Glasscheiben bestanden. An zwei gegenüberstehenden Teilen des Eisenrahmens befanden sich nach oben gerichtete Eisenstäbe zur Aufnahme der Umdrehungsachse, die eine Kreisscheibe von 17 cm Durchmesser trug, durch welche die Umdrehung auf eine horizontal liegende Kreisscheibe von 3 cm Durchmesser übertragen werden konnte, in deren Achse ein Messingrohr zur Aufnahme der Führungsstäbe sich befand, an welchen die Rotationskörper befestigt waren. Auf den beiden anderen Teilen des oberen Eisenrahmens befand sich ein als Brücke dienender Stab, auf dem die kleinere Kreisscheibe befestigt war. An einem Ende der Umdrehungsachse stand senkrecht auf einer Kreisscheibe die Kurbel, durch welche die an den Führungsstäbchen hängenden Körper in Rotation versetzt werden konnten.

Zur Beobachtung der Bewegung der Wasserteilchen wurde

für den ersten Teil der Untersuchungen Bernsteinsand in das Wasser geschüttet, später jedoch weiße Papierschnitzel in der Größe von 1 bis 1,5 mm im Quadrat zu gleichem Zweck verwendet.

Um die vertikale Strömung der Wasserteilchen zur Ebene der rotierenden Kreisscheibe zu erhalten, ist es erforderlich, die Flüssigkeit stets zur Ruhe kommen zu lassen, bevor die erneute Rotation beginnt, denn die durch vorhergehende Versuche dem Wasser erteilte Bewegung, die noch einen entsprechenden Zeitraum nach dem Aufhören der Rotation vorhanden ist, wirkt sehr störend und läßt eine präzise Vertikalbewegung der Wasserteilchen nicht aufkommen. Befinden sich dieselben in Ruhe, so beobachtete man hauptsächlich die ersten Rotationen der Kreisplatte, an welche die Flüssigkeitsteilchen von unten auf- und von oben abwärts in vertikaler Richtung hinziehen; bei fortgesetzter Rotation geht die vertikale Strömung der Teilchen in eine immer weiter sich ausdehnende spiralförmige über, die jedoch ebenfalls das Bestreben zeigt, die Wasserteilchen an die rotierende Platte heran zu bewegen.

Der Durchmesser der Kreisplatte, mit welcher die meisten Rotationsversuche angestellt wurden, betrug 15 cm, doch auch kleinere und größere Platten wurden im Laufe der Untersuchungen benutzt, die alle dieselben Resultate ergaben.

Um die Bewegungen der Flüssigkeitsteilchen zu beschleunigen und dieselben in größerer Menge in Bewegung zu bringen, waren die Rotationsplatten an ihrem Umfang an einigen Stellen mit sehr kleinen Zacken versehen; der Führungsstab stand senkrecht zur Ebene der Kreisplatte mit dieser fest verbunden und wie bei allen anderen Rotationskörpern in der Hülse befestigt, welche in der Achse der auf der Brücke sitzenden kleineren Kreisscheibe sich befand. Der Führungsstab konnte in der Hülse auf- und abwärts verschoben werden, wodurch die Höhe des Rotationskörpers im Wasser nach Erfordern geändert werden konnte.

Wird eine hohle Kugelhaube auf gleiche Weise wie die Kreisplatte in Rotation versetzt, so ziehen die Flüssigkeitsteilchen von allen Seiten in *radialer Richtung* an den Rotationskörper hin; denkt man sich in den Strömungsrichtungen die

einzelnen Wirbelfäden oberhalb der Kugelhaube durch die Fläche hindurch verlängert oder ihren Weg fortgesetzt, so würden sie die Rotationsachse erreichen.

Setzen wir einen Hohlzylinder, in dessen Achse der Führungsstab sich befindet, in Rotation und ist am oberen wie am unteren Kreisumfang ein entsprechend dünner Kranz mit 1 cm großen Zacken befestigt, die alle nach einer bestimmten Richtung aufgebogen sind, so ziehen die Wasserwirbel in das Innere des Zylinders von einer Seite hinein, bewegen sich durch die Rotationsachse und kommen auf der entgegengesetzten Seite heraus, um außerhalb des Zylinders im Bogen wieder an die Eintrittsstelle zu gelangen. Wollen wir diese Bewegungsrichtung umkehren, so müssen wir die Rotationsrichtung ändern und den Zylinder nur in entgegengesetzter Richtung in Rotation bringen, wie bereits im zweiten Satz bemerkt wurde. Bei diesem Vorgange beobachten wir, daß die austretenden Wirbel nicht mehr in derselben Menge erscheinen, wie die eintretenden, und daß ein Teil derselben durch die Widerstände, die im Innern des Rotationskörpers vorhanden sind, in ihrer Bewegungsrichtung verändert wird. Der zu diesen Versuchen dienende Hohlzylinder hatte einen Durchmesser von 7,5 cm und eine Höhe von 6,9 cm. Bezeichnen wir die Austrittsstelle der Wirbelfäden mit *Nordpol*, die Eintrittsstelle mit *Südpol*, so können wir durch Umkehrung der Rotationsrichtung die beiden Pole umkehren. Wenn die erste Rotation, welche oben den Nordpol erzeugte, eine rechtsdrehende war, so werden wir an derselben Stelle einen Südpol herstellen, wenn eine linksdrehende Bewegung stattfindet. Dieser Versuch erinnert uns an die Umkehrung der magnetischen Pole durch Umkehrung des elektrischen Stromes beim Magnetisieren eines Stabmagneten.

Während der Rotation der Hohlkörper ziehen die austretenden und die übrigen außerhalb der Körper befindlichen Flüssigkeitsteilchen im Bogen bis an die Wände des Wasserbeckens, um wieder nach fortgesetzter Bewegung an den Rotationskörper zu gelangen. Bei andauernder Rotation nimmt die Wasserschicht, welche durch Adhäsion mit den Körpern zusammenhängend rotiert, immer mehr und mehr zu und die heranströmenden Wirbelfäden und weiteren Flüssigkeitsteilchen

bewegen sich deshalb ebenfalls in einem immer größer werdenden Bogen um den Rotationskörper herum, weshalb die heranströmenden Wasserteilchen, die in radialer Richtung die Fläche der rotierenden Körper zu erreichen bestrebt sind, von der zunehmenden Wasserschicht in ihre rotierende Bewegung mitgenommen werden und dann ebenfalls in einem weiten Bogen um den Rotationskörper ihren Weg fortsetzen. Werden in diese Flüssigkeitsbewegungen an dünnen Fäden hängende Körperchen herabgelassen, so ziehen die letzteren ganz im Sinne der bewegten Flüssigkeitsteilchen zuerst radial und dann im Bogen um den Rotationskörper herum.

Dasselbe Resultat, welches durch die Rotation des Hohlzylinders geliefert wird, erhalten wir mit der Hohlkugel, wenn wir rings um die beiden Polausschnitte ähnliche nach einer Seite aufgebogene Zacken anbringen, wie dies bei dem Zylinder stattgefunden hat; es erscheinen nur infolge der Krümmung der Kugeloberfläche die radial heranströmenden Wirbelfäden in entsprechenden Neigungen, die jedoch an den Körpern schärfer hervortreten, an welchen die mit Zacken versehenen Ringe fehlen, die nur den Zweck hatten, eine Umkehrung der Pole sichtbar zu machen.

Bei den bis hierher beschriebenen Versuchen spielt die feste Fläche des Rotationskörpers eine störende Rolle, wenn man die Erscheinung der radialen Bewegung der Wasserteilchen möglichst gut ausgeprägt erhalten will, denn die erwähnte Fläche, an welcher durch Adhäsion die anliegende Flüssigkeitsschicht hängt, verursacht, wie bereits auf p. 391 näher beschrieben, bei fortgesetzter Rotation ein Anwachsen weiterer Wassermengen, die mit dem Körper in Rotation gelangen und eine Annäherung der radialen Strömung an die Fläche der Rotationskörper zu verhindern suchen; in solchem Falle beobachtet man, wie die herabhängenden Körperchen, sobald sie in die Nähe der rotierenden Wassermasse gelangen, nicht mehr die begonnene Richtung der radialen Bewegung beibehalten, sondern im Bogen um den Rotationskörper und zwar in Richtung des rotierenden Wassers herumziehen. Diesen Einfluß der undurchdringlichen Fläche suchte ich dadurch zu vermindern, daß ich Rotationskörper anwendete, die aus dünnen Flachringen bestanden und aus dem schwächsten, käuflichen

Eisenblech geschnitten waren; ihr Durchmesser betrug 10 cm und ihre Ringbreite 1 cm; eine entsprechende Anzahl solcher Ringe war übereinander an einem Führungsstab so befestigt, daß dieser die Achse des Hohlzylinders bildete, dessen Zylindermantel durch die Abstände der übereinander sitzenden Ringe genügend durchbrochen war, damit die Wasserteilchen, die in radialer Bewegung begriffen waren, ohne den bereits erwähnten Widerstand bis dicht an den Umfang der Ringe heranströmen konnten, die Entfernungen derselben voneinander waren für die verschiedenen zu den Versuchen benutzten Rotationszylinder 1, 1,5 und 2 cm. Jeder einzelne Ring besaß drei bis vier kreisförmige Vorsprünge an seinem Umfang, die je nach Erfordern aufgebogen werden konnten, um die Größe der Wasserströmung zu verändern und die Umkehrung der Pole zu ermöglichen.

Zur Herstellung eines kugelförmigen Körpers wurden diese Flachringe in so verschiedenen Größen angewendet, wie diese zur Herstellung der kugelähnlichen Form erforderlich erschienen; die beiden Ringe an den Polen waren daher die kleinsten und die Durchmesser der übrigen Ringe nahmen im Verhältnis bis zu dem Äquatorring um soviel zu, wie zur Erreichung der Kugelform nötig war. Unter Anwendung solcher Flachringe erhielt ich Rotationskörper, die bei fortgesetzter Rotation nicht so große Flüssigkeitsmengen in ihrer einmal eingenommenen Richtung mitziehen, sondern eine besser hervortretende Radialströmung zustande kommen lassen und ermöglichen, daß die Flüssigkeitsteilchen in vollständig radialer Richtung bis an den Umfang der Ringe sich bewegen. Aus demselben Grund bewegen sich auch die im Wasser herabhängenden Körper im gleichen radialen Sinne bis an den Rotationskörper heran. Bei geradliniger Fortbewegung fester Körper ohne Rotation derselben werden in der Flüssigkeit Wirbel erzeugt, die der Körper so lange hinter sich herzieht, wie er in Bewegung sich befindet; in solchem Falle wird ebenfalls eine Anziehung verursacht, jedoch nur in der linearen Richtung, in welcher die fortschreitende Bewegung des Körpers andauert, eine radiale Strömung der Wasserteilchen findet hier nicht statt.

Das Ergebnis dieser Untersuchung zeigt uns, wenn man

der Flüssigkeit, in welcher ein Körper in Rotation sich befindet, einen freien Durchgang bis zur Rotationsachse des ersteren gewährt, daß die Teilchen des Wassers bei fortgesetzter Rotation das Bestreben haben, nach dem Mittelpunkt des Rotationskörpers sich hinzubewegen und andere Massen, die sich in entsprechenden Entfernungen in der Flüssigkeit befinden, in der eingenommenen radialen Richtung mitzuziehen. Wir erhalten hierdurch das Bild einer nach dem Mittelpunkt des Körpers gerichteten, radialen Anziehung, die durch ein zwischenliegendes Medium, das für unsere Untersuchung das Wasser ist, vermittelt wird. Stellen wir uns den Äther als das Medium vor, das den Weltraum erfüllt, so erhalten wir auf Grund der beobachteten Radialströmung eine Analogie unseres Ergebnisses mit dem freien Fall der Körper im Weltraume.

(Eingegangen 7. September 1905.)

8. Permeabilitätsmessung an Stahlkugeln; von R. H. Weber.

Die Kugelgestalt ist zu allen Messungen der Magnetisierung wegen der beträchtlichen Entmagnetisierung sehr ungeeignet. C. Fromme¹⁾ hat im Jahre 1874 die „Magnetisierungsfunktion“

$$P = \frac{x}{1 + \frac{1}{4}\pi x}$$

an Kugeln auf magnetometrische Weise bestimmt, und Riecke hat darauf hingewiesen, daß diese Funktion mit zunehmendem x eine Konstante wird. Seitdem sind meines Wissens ähnliche Messungen an Kugeln nicht ausgeführt worden.

Vor anderen Körpern bietet die Kugel den Vorteil, daß sie mit großer Exaktheit hergestellt und in ihren Dimensionen reproduziert werden kann. Da ich die Permeabilität von Stahl, der mir nur in Kugelgestalt gegeben war, bestimmen mußte, so habe ich versucht, durch geeignete Schaltungen bei einer ballistischen Methode möglichste Genauigkeit bei Permeabilitätsmessungen an Kugeln zu erzielen.

Daß das möglich ist, liegt einmal an den genannten Eigenschaften der Kugel, dann an der Möglichkeit, Windungszahlen mit großer Genauigkeit um ganze Vielfache zu vermehren oder zu vermindern.

Es sei mir gestattet, die Resultate, zu denen ich gekommen bin, hier bekannt zu machen, da ähnliche Messungen vielleicht auch anderweitig vorkommen können.

1) C. Fromme, Pogg. Ann. 152. p. 627. 1874.

Theoretisches über die Methode.

Bedeutet D ein homogenes Magnetfeld, in das wir die Kugel von der Permeabilität μ hineinbringen, so wird im Innern der Kugel ein homogenes Magnetfeld M entstehen, das die Größe hat:

$$(1) \quad M = \frac{3\mu_0}{\mu + 2\mu_0} D^1)$$

und die Induktion wird:

$$(2) \quad B = \mu M = \frac{3\mu_0\mu}{\mu + 2\mu_0} D.$$

Meßbar ist uns nur B und D , aber nicht M , und aus dem Verhältnis $B:D$ berechnet sich nach 2 die Permeabilität.

Dieses Verhältnis nähert sich aber mit zunehmendem μ dem Grenzwert 3, von dem es bei dem Werte $\mu = 20$ ($\mu_0 = 1$), der dem härtesten Stahl etwa zukommen mag, schon sehr wenig abweicht. Es wird also eine außerordentlich sorgfältige Messung erforderlich sein, um die Abweichungen dieses Verhältnisses von der Zahl 3 zu konstatieren.

Wir wollen uns nun zunächst die nächstliegende ballistische Methode zur Ausführung der Messung der Permeabilität einer Stahlkugel ausgeführt denken.

Äquatorial um die Kugel legen wir n Windungen. Diese n Windungen mögen so wenig Raum einnehmen, daß sie trotz der Kugelgestalt ihrer Unterlage alle als von gleichem Durchmesser angesehen werden mögen. Bei unserer Messung war $n = 14$ (Spirale S_1).

Um eine Zylinderfläche aus nicht ferromagnetischem Material ($\mu_0 = 1$) (angewandt wurde eine Hartgummirolle), die einen identischen Durchmesser hat, wie die Kugel, legen wir ebenfalls n Windungen (Spirale S_0). Wir schalten diese in einen Schließungskreis mit S_1 und einen ballistischen Galvanometer G .

Nun führen wir einmal die Kugel mit der Spirale S_1 in eine Primärrolle P ein von hinreichender Länge und genügen-

1) Vgl. E. Cohn, Das elektromagnetische Feld p. 110. 114.

der Windungszahl, um in ihr ein homogenes Feld durch einen Primärstrom zu erhalten. Die Achsen von S und P sollen parallel sein. Der Primärstrom sei immer wieder in identischer Größe herstellbar. Beim Erregen, Unterbrechen oder Kommutieren dieses Stromes erhalten wir einen Ausschlag des Galvanometers, der proportional mit B ist:

$$s_1 = c \cdot B.$$

Führen wir zweitens die Spirale S_0 statt S_1 in P ein, und verfahren ebenso wie vorher, dann erhalten wir einen Ausschlag des Galvanometers

$$s_0 = c \cdot D.$$

Nehmen wir nun $\mu_0 = 1$ an, so folgt nach (2):

$$\frac{s_1}{s_0} = \frac{3\mu}{\mu + 2}$$

und daraus

$$(3) \quad \mu = \frac{2 \cdot s_1}{3 s_0 - s_1}.$$

$3 s_0 - s_1$ wird mit zunehmendem μ immer kleiner gegenüber s_0 und s_1 . Fehler bei der Messung von s_0 und s_1 werden also mit sehr großem Gewicht in die Rechnung eingehen.

Wesentlich sicherer wird die Messung dadurch, daß man die im Nenner stehende Größe direkt mißt. Das geschieht dadurch, daß man erstens die Anzahl der Windungen auf S_0 verdreifacht, also $3n$ Windungen auflegt. Der hierdurch hervorgerufene Ausschlag wird also dann gleich $3 s_0$ sein.

Außerdem nehmen wir zwei Primärrollen P_1 , P_0 , die möglichst identisch ausgeführt, weit genug voneinander aufgestellt (bez. mit zueinander senkrechten Achsen), um sich nicht gegenseitig zu stören, und vom gleichen Strom durchflossen sind, gleichzeitig in Betrieb. S_1 und S_0 werden so geschaltet, daß sie entgegengesetzte Ströme liefern. Der Ausschlag, den wir so erhalten, ist

$$(4) \quad \sigma_0 = 3 s_0 - s_1.$$

Den Ausschlag s_1 bekommen wir, wenn wir S_0 aus P_0 heraus-

nehmen, aber in dem Stromkreis eingeschaltet lassen. Wir machen dann den einzigen Fehler, der aber sicherlich ungefährlich ist, daß wir die Rückwirkung von S_0 auf P_0 durch wechselseitige Induktion auch mit ausschalten. Experimentell läßt sich die Bedeutungslosigkeit dieses Fehlers leicht zeigen, wenn wir S_0 in eine dritte, in sich kurzgeschlossene Spirale P einführen.

Es ergibt sich aber jetzt eine weitere Schwierigkeit dadurch, daß die Ausschläge s_1 und σ_0 von verschiedener Größenordnung sind, was die Ausnutzung der Galvanometerempfindlichkeit erschwert. Dem kann dadurch abgeholfen werden, daß man die Spirale S_1 unterteilt, indem man sie etwa in $n/2 + 1$ und $n/2 - 1$ Windungen zerlegt, die man gegeneinander und hintereinander schaltet. Zur Messung von σ_0 lassen wir sie hintereinander geschaltet. Zur Bestimmung von s_1 schalten wir sie gegeneinander. Dann wirken induktiv nur 2 statt n Windungen, und wir erhalten einen Ausschlag:

$$\sigma_1 = \frac{2}{n} s_1.$$

$$(5) \quad s_1 = \frac{n}{2} \sigma_1.$$

Es wird also jetzt aus (3), (4) und (5):

$$(6) \quad \mu = \frac{n \cdot \sigma_1}{\sigma_0}.$$

Wir haben also n so zu wählen, daß σ_1 und σ_0 von gleicher Größenordnung werden, also muß n von der Größenordnung von μ sein.

Fehlerquellen und Korrekturen.

Bei den später auszuführenden Messungen ergibt sich μ etwa von der Größe 36. Diese Zahl wollen wir bei der Beurteilung der Fehler zugrunde legen, ebenso die übrigen Konstanten der angewandten Anordnung. Die Größe μ mag zunächst, da sie nur zu Korrektionsgliedern gebraucht wird, durch angenäherte Messung gewonnen sein.

Da

$$\mu = \frac{2s_1}{\sigma_0},$$

also $s_1 = 18 \cdot \sigma_0$ und

$$\sigma_0 = 3s_0 - s_1$$

ist, so folgt, ein Fehler im Werte s_1 von δ Proz. geht in σ_0 , und damit in μ mit dem Betrag $18 \cdot \delta$ Proz. ein, wenn er nicht durch einen gleichzeitigen Fehler von σ_0 kompensiert wird. Es steht uns aber frei, wenn die Rolle S_0 gleichmäßig zylindrisch gearbeitet ist, den Wert σ_0 als normal zugrunde zu legen, und alle Fehler auf s_1 abzuschieben.

1. Ungleichheit der Felder in P_1 und P_0 lassen sich dadurch konstatieren, daß man P_1 und P_2 bez. S_1 und S_2 vertauscht, und beide Male σ_0 bestimmt. Ganz geringe Abweichungen geben schon beträchtliche Abweichungen von σ_0 vor dem Vertauschen und σ'_0 nach demselben. Ist in P_0 das Feld D , in P_1 $D(1 + \delta)$, so wird

$$s_0 = cD,$$

$$s_1 = c(1 + \delta)B,$$

nach dem Vertauschen

$$s'_0 = c \cdot (1 + \delta)D,$$

$$s'_1 = c \cdot B,$$

$$\frac{B}{D} = \frac{s_1 + s'_1}{s_0 + s'_0}$$

und daraus folgt, durch Anwendung von Gleichung (2),

$$\mu = \frac{s_1 + s'_1}{3(s_0 + s'_0) - (s_1 + s'_1)} = \frac{s_1 + s'_1}{\sigma_0 + \sigma'_0};$$

wir können den Fehler, der in einer Ungleichheit der Felder P_1 und P_0 beruht, durch Mittelwertbildung eliminieren, und zwar korrekt, nicht nur angenähert.

2. Der Abstand, den die Achse des auf die Kugel gewickelten Drahtes von der Kugeloberfläche besitzt, bedingt einen Fehler, der aber klein ausfällt, weil das Feld in der

Nähe des Kugeläquators sehr vermindert ist, infolge des geringen magnetischen Widerstandes der Kugel. Der Ausschlag s_1 wird dadurch zu groß, daß die ringförmige Fläche zwischen Kugelumfang und Drahtachse von Kraftlinien durchsetzt wird. Die Kugel wird durchsetzt von

$$k = \frac{8\mu}{\mu+2} D \cdot a^2 \pi^1)$$

Kraftlinien. Die genannte Ringfläche von

$$K' = \left\{ -\frac{\mu-1}{\mu+1} D \left(\frac{a^2}{r^2} - 3 \frac{a^2}{r^2} \frac{x^2}{r^2} \right) + D \right\} \cdot 2 a \delta \pi^1),$$

worin a den Kugelradius, δ den genannten Achsenabstand bedeutet. Das zweite Glied in der Klammer () können wir von vornherein vernachlässigen, da x gegen r stets klein ist. Und es wird die Kraftlinienzahl

$$D \left(1 - \frac{\mu-1}{\mu+2} \frac{a^2}{r^2} \right) \cdot 2 a \delta \pi,$$

In unserer Ausführung ist

$$a = 20,288 \text{ mm}, \quad \delta = 0,098$$

also

$$r = 20,386,$$

$$\left(1 - \frac{\mu-1}{\mu+2} \frac{a^2}{r^2} \right) = 0,092,$$

$$\left(1 - \frac{\mu-1}{\mu+2} \frac{a^2}{r^2} \right) \cdot 2 \delta = 0,0180,$$

$$K' = 0,0180 \cdot a \pi D,$$

während

$$K = 56,5 \cdot a \pi D$$

ist. Also haben wir an s_1 eine Korrektur von

$$-0,032 \text{ Proz.}$$

auszuführen. Im Zähler ist das zu vernachlässigen. Im Nenner, also an σ_0 angebracht, macht es, wie bereits erwähnt,

1) Vgl. E. Cohn, l. c. p. 114, Formel (82).

den 18fachen Betrag, und zwar mit umgekehrtem Vorzeichen. Es ist also σ_0 zu ersetzen durch:

$$\sigma_0(1 + 0,0058).$$

3. Wenn der Kugeldurchmesser nicht genau den gleichen Durchmesser hat wie die Achse des auf die Hartgummirolle S_0 aufgewickelten Drahtes, so wird ein Fehler gemacht, der der Abweichung der umspannten Flächen voneinander proportional ist. Die Kugel und die Hartgummirolle lassen sich mit Sorgfalt sehr exakt herstellen. Es betrug bei unserem Beispiel der Kugelradius

$$20,288 \text{ mm,}$$

der der Hartgummispule, gemessen zwischen den Achsen eben aufgewickelten Drahtes

$$20,281 \text{ mm,}$$

das bedingt einen Fehler von 0,035 Proz. des Radius, also von 0,070 Proz. der Windungsfläche. Wir brauchen also hier wieder s_1 im Zähler nicht zu korrigieren, σ_0 dagegen muß um + 1,26 Proz. korrigiert werden. Wir haben also jetzt insgesamt σ_0 zu ersetzen durch

$$\sigma_0(1 + 0,017).$$

4. Wegen der Kugelgestalt umfassen die äußeren der n Windungen von S_1 nicht alle Kraftlinien. Es ist dies in unserem Falle der bedenklichste Fehler, wie wir sehen werden.

Nennen wir λ den Abstand der Achse einer Windung vom Äquator, r ihren Abstand vom Kugelmittelpunkt, so ist ihre „geographische Breite“

$$\varphi = \frac{\lambda}{r}.$$

Die Drahtachse umfaßt dann die Fläche $r^2 \pi \cdot \cos^2 \varphi$ statt der Fläche $r^2 \pi$, also eine um

$$r^2 \pi \sin^2 \varphi \sim r^2 \pi \varphi^2$$

zu kleine Fläche. $\varphi^2 \cdot 100$ gibt uns also direkt den Fehler in

Prozenten. Da wir $n/2$ Windungen auf jeder Seite des Äquators haben, so ist der gesamte Fehler

$$\frac{\sum \lambda/r^2}{n/2} \cdot 100 \text{ Proz.}$$

Die Breite aller Windungen zusammen genommen war, obwohl nach der Drahtdicke weniger zu erwarten wäre, 1,8 mm, von äußerster bis äußerster Drahtachse gemessen. Es ist also λ im Maximum 0,9 mm. Zwischen 0 und 0,9 cm liegen 13 halbe Drahtdicken, jede gleich 0,9/13 mm. Die Achsen liegen somit bei

$$\frac{0,9}{13}, \quad 3 \cdot \frac{0,9}{13}, \quad 5 \cdot \frac{0,9}{13} \dots \quad 13 \cdot \frac{0,9}{13}$$

und es wird unser Fehler:

$$\frac{1}{r^2} \frac{0,9^2}{13^2} \cdot (1 + 3^2 + 5^2 + \dots + 13^2) \cdot \frac{100}{7} \text{ Proz.,}$$

worin $2r = 20,386$ ist.

Das macht eine Korrektion an s_1 von +0,293 Proz., also an σ_0 eine Korrektion von -5,8 Proz. Wir haben also im ganzen σ_0 zu ersetzen durch

$$(7) \quad \sigma_0 (1 - 0,036)$$

und an s_1 etwa eine Korrektion von +0,2 Proz. anzubringen.

Ausführung der Messungen.

Die Primärrollen P_0 und P_1 waren 12 cm lang, 32 mm im Durchmesser, hatten 290 Windungen eines 0,35 mm dicken Cu-Drahtes und einen Widerstand von je etwa 5 Ohm. Sie waren parallel geschaltet und die eine durch einen Vorschaltwiderstand abgeglichen, so daß σ_0 nahezu gleich σ_0' war. In dem Stromkreis lagen außerdem noch 2 Ohm Vorschaltwiderstand, eine Wippe und zwei hintereinander geschaltete Akkumulatoren.

Die Stahlkugel bestand aus Remystahl¹⁾, war sorgfältig

1) Aus der Fabrik von H. Remy in Hagen. Ich habe diesen Stahl wegen seiner starken Magnetisierbarkeit öfters verwendet.

abgedreht und gehärtet. Der Durchmesser am Äquator wurde als das Mittel von zehn verschiedenen Messungen bestimmt, die im Maximum um etwa 1 Promille voneinander abwichen. Der Mittelwert betrug 20,288 mm. Das Aufwickeln der n Windungen S_1 gelingt, wenn man die Kugel mit einem dünnen Wachsüberzug bedeckt, der von kaum meßbarer Dichte sein kann. Die Windungen wurden dann der Haltbarkeit wegen lackiert und die Zuleitungen — vier an Zahl, wegen der Unterteilung — umeinander gewunden, um keine Induktion in ihnen zu erhalten.

Die Spule S_0 war auf eine Hartgummirolle aufgewickelt, die durch Abschleifen auf feinem Schmirgelpapier auf ihre definitive Dicke gebracht wurde. Diese war so gewählt, daß die Achse des aufgewickelten Drahtes einen Kreis von gleichem Durchmesser bildete wie die Kugel. Auch hier ist es nicht schwer, die Durchmesser nach den verschiedensten Richtungen hin bis auf 1 Promille übereinstimmend zu bekommen. Das Mittel aus 20 Messungen betrug

20,165 mm

ohne Umwicklung und

20,397

mit Umwicklung, so daß als Durchmesser der Drahtachse

20,281

gesetzt werden kann.

Der aufgewickelte Draht hat einen Durchmesser von 0,05 mm blank. Er wurde mir in liebenswürdiger Weise von der Firma Hartmann & Braun zur Verfügung gestellt.

Die Windungszahl von S_0 betrug 42, die von S_1 $6+8=14$. Die Widerstände waren 19,2 und 8,0 Ohm.

Die Spulen S_0 und S_1 waren hintereinander (gegeneinander) geschaltet in einen Kreis mit einem Du Bois-Rubensschen Galvanometer, das bei einem inneren Widerstand von 20 Ohm eine Empfindlichkeit von $7 \cdot 10^{-9}$ Amp. besaß. Das ist in Anbetracht des geringen inneren Widerstandes ziemlich empfindlich. Mehr ist jedenfalls in Heidelberg auch bei nächstlichem Arbeiten nicht zu erreichen. Es zeigte sich hierbei immer eine ganz langsame Schwankung der Ruhelage um

Prozenten. Da wir $n/2$ Windungen auf jeder Seite des Äquators haben, so ist der gesamte Fehler

$$\frac{\sum k/r^3}{n/2} \cdot 100 \text{ Proz.}$$

Die Breite aller Windungen zusammen genommen war, obwohl nach der Drahtdicke weniger zu erwarten wäre, 1,8 mm, von äußerster bis äußerster Drahtachse gemessen. Es ist also λ im Maximum 0,9 mm. Zwischen 0 und 0,9 cm liegen 13 halbe Drahtdicken, jede gleich 0,9/13 mm. Die Achsen liegen somit bei

$$\frac{0,9}{13}, \quad 3 \cdot \frac{0,9}{13}, \quad 5 \cdot \frac{0,9}{13} \dots \quad 13 \cdot \frac{0,9}{13}$$

und es wird unser Fehler:

$$\frac{1}{r^3} \frac{0,9^3}{13^3} \cdot (1 + 3^2 + 5^2 + \dots + 13^2) \cdot \frac{100}{7} \text{ Proz.,}$$

worin $2r = 20,386$ ist.

Das macht eine Korrektion an s_1 von +0,293 Proz., also an σ_0 eine Korrektion von -5,8 Proz. Wir haben also im ganzen σ_0 zu ersetzen durch

$$(7) \quad \sigma_0(1 - 0,036)$$

und an s_1 etwa eine Korrektion von +0,2 Proz. anzubringen.

Ausführung der Messungen.

Die Primärrollen P_0 und P_1 waren 12 cm lang, 32 mm im Durchmesser, hatten 290 Windungen eines 0,35 mm dicken Cu-Drahtes und einen Widerstand von je etwa 5 Ohm. Sie waren parallel geschaltet und die eine durch einen Vorschaltwiderstand abgeglichen, so daß σ_0 nahezu gleich σ_0' war. In dem Stromkreis lagen außerdem noch 2 Ohm Vorschaltwiderstand, eine Wippe und zwei hintereinander geschaltete Akkumulatoren.

Die Stahlkugel bestand aus Remystahl¹⁾, war sorgfältig

1) Aus der Fabrik von H. Remy in Hagen. Ich habe diesen Stahl wegen seiner starken Magnetisierbarkeit öfters verwendet.

abgedreht und gehärtet. Der Durchmesser am Äquator wurde als das Mittel von zehn verschiedenen Messungen bestimmt, die im Maximum um etwa 1 Promille voneinander abwichen. Der Mittelwert betrug 20,288 mm. Das Aufwickeln der n Windungen S_1 gelingt, wenn man die Kugel mit einem dünnen Wachsüberzug bedeckt, der von kaum meßbarer Dichte sein kann. Die Windungen wurden dann der Haltbarkeit wegen lackiert und die Zuleitungen — vier an Zahl, wegen der Unterteilung — umeinander gewunden, um keine Induktion in ihnen zu erhalten.

Die Spule S_0 war auf eine Hartgummirulle aufgewickelt, die durch Abschleifen auf feinem Schmirgelpapier auf ihre definitive Dicke gebracht wurde. Diese war so gewählt, daß die Achse des aufgewickelten Drahtes einen Kreis von gleichem Durchmesser bildete wie die Kugel. Auch hier ist es nicht schwer, die Durchmesser nach den verschiedensten Richtungen hin bis auf 1 Promille übereinstimmend zu bekommen. Das Mittel aus 20 Messungen betrug

20,165 mm

ohne Umwicklung und

20,397

mit Umwicklung, so daß als Durchmesser der Drahtachse

20,281

gesetzt werden kann.

Der aufgewickelte Draht hat einen Durchmesser von 0,05 mm blank. Er wurde mir in liebenswürdiger Weise von der Firma Hartmann & Braun zur Verfügung gestellt.

Die Windungszahl von S_0 betrug 42, die von S_1 $6+8=14$. Die Widerstände waren 19,2 und 8,0 Ohm.

Die Spulen S_0 und S_1 waren hintereinander (gegeneinander) geschaltet in einen Kreis mit einem Du Bois-Rubensschen Galvanometer, das bei einem inneren Widerstand von 20 Ohm eine Empfindlichkeit von $7 \cdot 10^{-9}$ Amp. besaß. Das ist in Anbetracht des geringen inneren Widerstandes ziemlich empfindlich. Mehr ist jedenfalls in Heidelberg auch bei nächstlichem Arbeiten nicht zu erreichen. Es zeigte sich hierbei immer eine ganz langsame Schwankung der Ruhelage um

etwa 1 Skt., was bei der Größenordnung der Ausschläge schon wesentlich in Betracht kommt. Ich möchte diese Schwankungen dem Dreileitersystem der hiesigen Zentrale zuschreiben. Bei Tage zu arbeiten ist gänzlich ausgeschlossen, da die am Hause vorbeifahrende elektrische Straßenbahn Ausschläge verursacht, die die größten in den Messungen vorkommenden Ausschläge weit überschreiten.

Die folgende Tab. 1 enthält die Ausschläge σ_0 , σ_1 , σ_0 , wie sie sich bei aufeinanderfolgenden Messungen ergaben. Die Tab. 2 enthält die entsprechenden Werte nach Vertauschung der Primärrollen P_1 , P_0 gegenüber den Sekundärspulen S_1 , S_0 .

Tabelle 1.

σ_0	σ_1	σ_0
18,7	50,0	18,2
18,2	49,4	18,2
18,2	49,9	18,8
18,2	49,2	19,0
18,7	50,2	18,9
18,8	50,0	18,9
Mittel: 18,4	49,8	18,7

Tabelle 2.

σ_0'	σ_1'	σ_0'
18,8	49,4	19,2
18,9	49,7	19,9
18,6	49,8	19,2
19,1	49,3	19,3
18,9	49,7	19,2
19,0	49,2	19,5
Mittel: 18,9	49,5	19,4

Die einzelnen Ablesungen weichen also im Maximum um etwa 2 Proz. vom Mittelwert ab. Ein Fehler von 1 Proz. dürfte also beim Mittelwert wohl kaum zu befürchten sein.

Es ergibt sich aus den Messungen nach Formel (6) und (7)

$$\mu = 14 \cdot \frac{49,65}{18,8 \cdot (1 - 0,036)} = 38,44$$

als Permeabilität des gehärteten Remystahles.

Das in der Kugel vorhandene Magnetfeld beträgt nach Berechnung etwa $1\frac{1}{4}$ Gauss. Man mißt also mit sehr geringen Feldänderungen.

Eine weit größere Genauigkeit läßt sich an störungsfreien Orten und bei Anwendung größerer Kugeln erreichen. Es ist nicht ausgeschlossen, daß man sogar Eisenkugeln wird verwenden können.

Heidelberg, Physik. Institut, im August 1905.

(Eingegangen 6. September 1905.)

9. Über das Eigenlicht des Radiumbromids; von B. Walter und R. Pohl.

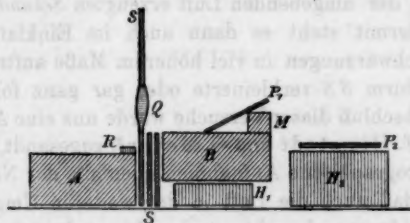
Sir William und Lady Huggins¹⁾ haben nachgewiesen, daß das Spektrum des Eigenlichtes des Radiumbromids nahezu vollkommen mit dem Bandenspektrum des Stickstoffs übereinstimmt — und zwar mit demjenigen des *negativen* Poles einer mit ein wenig Luft gefüllten Geisslerschen Röhre besser als mit dem *positiven* Lichte der letzteren. Sie vermuten demnach, daß das in Rede stehende Radiumlicht in der Hauptsache durch den Anprall der negativ geladenen β -Strahlen gegen die das Radiumsalz umgebenden Luftteilchen erzeugt wird, und erwarten demgemäß, daß jenes Licht seine Entstehung nicht bloß in der unmittelbaren Nachbarschaft des Salzes, sondern auch noch in einiger Entfernung davon nimmt. Diese letztere Erwartung konnten sie jedoch durch den Versuch nicht bestätigen und sprechen infolgedessen die weitere Vermutung aus, daß jene Strahlen die Stickstoffmoleküle nur „in molekularen Distanzen und im Momente ihrer Bildung“ erregen dürften.

Dem gegenüber läßt sich nun aber mit Leichtigkeit zeigen, daß das Leuchten der Luft in der Umgebung des Radiumbromids *selbst noch in mehreren Zentimetern Abstand von dem Salze stattfindet*.

Von mehreren, nahezu gleichartigen Versuchen, welche diese Tatsache beweisen, sei nur der folgende beschrieben. Das Radiumpräparat *R* (Figur) — ca. 9 mg Gieselsches Radiumbromid — lag frei an der Luft in seiner Hartgummikapsel auf einem runden Bleiklotz *A* von 6 cm Höhe und 12 cm Durchmesser. Rechts daneben war zunächst ein 4 mm dicker, 24 cm hoher und 30 cm breiter Bleischirm *SS* aufgestellt, in dessen Mitte ein rundes Loch geschnitten war, in das eine Quarzlinse von $11\frac{1}{2}$ cm Brennweite und 6,5 cm Durchmesser

1) Sir William u. Lady Huggins, Proc. Roy. Soc. 72. p. 196 u. p. 409. 1903.

mit ihrer Messingfassung eingepaßt wurde. (Die Linse aus Quarz wurde deswegen genommen, weil sie unter den gerade vorrätigen Stücken aus dieser Substanz das größte und dickste war. Bei einem anderen Versuche dieser Art wurde mit fast gleichem Erfolge eine 8 mm dicke, aber nur $2,4 \times 2,6$ cm große planparallele Platte aus Quarz benutzt.) Der Schirm SS war dabei so aufgestellt, daß der untere Rand der Quarzlinse 2 cm höher lag als das Radiumpräparat. Rechts neben SS wurden ferner noch mehrere, bis an den unteren Rand der Quarzlinse reichende Platten aus 4 mm dickem Blei und schließlich — auf einem passenden Holzklotz H_1 — noch ein zweiter runder Bleiklotz B von 6 cm Höhe und 12 cm Durchmesser so gestellt, daß seine obere Fläche ebenfalls mit dem unteren Rande der Quarzlinse in gleicher Höhe war. Auf diesem



Klotze B lag nun — durch einen Metallklotz M unter einem Winkel von 30° gegen die obere, horizontale Fläche von B geneigt — die photographische Platte P_1 , so daß der Abstand ihres vorderen Randes von der Quarzlinse Q 7 cm war. Die Platte P_1 war dabei mit einem lichtdichten Stück dünner schwarzer Pappe bedeckt, in dem mehrere Löcher angebracht waren, die mit verschiedenen Lichtfiltern (Quarz, farblose Gläser von verschiedener Ultraviolett durchlässigkeit, blaues Glas, gelbes Glas) bedeckt waren. Hinter dem Bleiklotze B wurde auf dem Holzklotze H_2 noch eine zweite Platte P_2 mit Lichtfiltern ausgelegt, um die Abwesenheit fremden Lichtes zu beweisen. Beide Platten wurden gleichzeitig und gleich lange, nämlich 42 Stunden, exponiert; und, während P_2 bei der Entwicklung völlig klar blieb, zeigte sich P_1 hinter den genannten Lichtfiltern genau in derselben Abstufung geschwärzt wie bei

den Versuchen mit der durch Radiotellurstrahlen leuchtend gemachten Luft.¹⁾

Außer dieser Schwärzung, die nach der oben beschriebenen Versuchsanordnung wohl nur von solchen durch die Strahlung des Radiumbromids leuchtend gemachten Luftteilchen bewirkt sein kann, die sich in mehr als 2 cm Abstand von dem Salze befanden, zeigten die betreffenden Platten stets auch noch eine viel schwächere Schwärzung hinter der schwarzen Pappe des Filters sowie eine noch wieder viel schwächere Schwärzung in denjenigen Teilen, die sowohl durch diese Pappe als auch durch einen Teil einer Filtersubstanz (Glas bez. Quarz) bedeckt waren. Diese letzteren Schwärzungen können natürlich nur von Strahlen herrühren, welche lichtdichte Pappe zu durchdringen vermögen, so daß es sich also hier in der Hauptsache jedenfalls um eine Wirkung der von der direkten Radiumstrahlung in der umgebenden Luft erzeugten *Sekundärstrahlung* handelt. Hiermit steht es dann auch im Einklang, daß die genannten Schwärzungen in viel höherem Maße auftraten, wenn man den Schirm *SS* verkleinerte oder gar ganz fortließ.

Nach Abschluß dieser Versuche wurde uns eine Abhandlung der Herren F. Himstedt und G. Meyer²⁾ zugesandt, in welcher durch spektrographische Aufnahmen ebenfalls der Nachweis geführt wird, daß auch die Luft in der weiteren Umgebung des Radiumbromids zum Leuchten gebracht wird, sodaß demnach wohl die eingangs zuerst erwähnte Vermutung von Sir William und Lady Huggins als die richtige anzusehen ist, d. h. die Vermutung, daß jenes Licht lediglich durch den *Anprall* der von dem Radiumsalz ausgesandten Becquerelstrahlen an die Moleküle der umgebenden Luft zustande kommt. Freilich dürften aber hierbei nicht bloß die von den genannten Verfassern heran-

1) B. Walter, Ann. d. Phys. 17. p. 367. 1905. Es sei noch erwähnt, daß neuerdings auch B. Walter in der durch Radiotellurstrahlung erregten lichtartigen Strahlung der Luft durch sehr lange Expositionen — außer dem ganz überwiegend vorhandenen Ultraviolett — auch schwaches Licht aus den sichtbaren Teilen des Spektrums festgestellt hat, wie dies zuerst von R. Pohl (Ann. d. Phys. 17. p. 375. 1905) nachgewiesen wurde.

2) F. Himstedt u. G. Meyer, Ber. d. Naturf. Gesellsch. Freiburg i. Br. 16. p. 13. 1905.

gezogenen β -Strahlen, sondern auch die α -Strahlen in Betracht kommen, da es sich doch beim Radiotellur nur um solche handelt.

Schließlich sei noch erwähnt, daß unsere Versuche, um die Sekundärstrahlung der die Platte P_1 umgebenden Gegenstände nach Möglichkeit zu verringern, stets im freien Zimmer, d. h. also auch in gewöhnlicher, feuchter Zimmerluft angestellt wurden, und daß sich also nach den Versuchen der Herren Himstedt und Meyer bei Anwendung einer vollkommen trockenen Luft noch stärkere Wirkungen ergeben haben dürften.

Hamburg, Physik. Staatslabor., September 1905.

(Eingegangen 17. September 1905).

10. *Bemerkung zu der Arbeit des Hrn. Becker:
„Messungen an Kathodenstrahlen“;
von G. E. Leithäuser.*

In meiner Arbeit über den Geschwindigkeitsverlust, welchen die Kathodenstrahlen beim Durchgang durch dünne Metallblättchen erleiden, und über die Ausmessung magnetischer Spektren¹⁾, habe ich die Durchlässigkeit der von mir benutzten Metallblättchen für die verschiedenen bei den Messungen angewandten Kathodenstrahlen bestimmt. Hr. Becker²⁾ berechnet aus der von mir angegebenen Durchlässigkeit D den Absorptionskoeffizienten α nach der Formel:

$$(1) \quad \alpha = \frac{1}{d} \lg \text{nat} \frac{1}{D}$$

und erhält dabei bei einer bestimmten Kathodenstrahengeschwindigkeit für zwei verschiedene Blättchendicken Werte von α , die bei dem dickeren Blättchen um 15 Proz. kleiner sind als bei dem dünneren. Er findet aus seinen Messungen einen von der Dicke unabhängigen Absorptionskoeffizienten und beanstandet aus diesem Grunde die Richtigkeit meiner Messungen.

Nun geht aber aus der von mir gegebenen Erklärung der Durchlässigkeit:

$$D = \frac{\text{Ladung der durchgegangenen Strahlen}}{\text{Ladung der auffallenden Strahlen}}$$

und auch aus der beschriebenen Versuchsanordnung deutlich hervor, daß die Formel (1) zur Berechnung von α nicht zutrifft. Legt man die bisherigen Anschauungen über den Vorgang beim Auftreffen von Kathodenstrahlen auf Metallblättchen zugrunde, nach denen vom Blättchen eine der einfallenden

1) G. E. Leithäuser, Ann. d. Phys. 15. p. 306. 1904.

2) A. Becker, Ann. d. Phys. 17. p. 445. 1905.

Intensität proportionale Menge reflektiert wird, so muß man die Ladung der durchgegangenen Strahlen gleich

$$J_0(1 - \alpha_r)e^{-\alpha d}$$

setzen, woraus sich

$$D = (1 - \alpha_r)e^{-\alpha d}$$

und

$$\alpha = \frac{1}{d} \lg \text{nat} \frac{1 - \alpha_r}{D}$$

ergibt. α_r ist der Reflexionskoeffizient des Blättchens und nach Hrn. Starke für Aluminium gleich 0,25 zu setzen. Rechnet man hiernach aus meinen Zahlen α aus, so findet man für ein Entladungspotential von 14000 Volt:

$$\alpha = 8580 \text{ für die Dicke } 0,00018 \text{ cm}$$

$$\alpha = 8300 \text{ „ „ „ } 0,00036 \text{ „}$$

Für ein Entladungspotential von 16500 Volt:

$$\alpha = 4550 \text{ für die Dicke } 0,00018 \text{ cm}$$

$$\alpha = 4470 \text{ „ „ „ } 0,00036 \text{ „}$$

Es besteht also die von Hrn. Becker berechnete Abnahme des Absorptionskoeffizienten für das dickere Blättchen nicht, wenn man die bisherigen Anschauungen über die Kathodenstrahlen zugrunde legt. Die geringen Unterschiede mögen in der Verschiedenheit der Aluminiumblättchen ihre Erklärung finden. Die Differenzen der Absorptionskoeffizienten werden größer, wenn man ihrer Berechnung die Anschauung des Hrn. Becker zugrunde legt, nach der beim Durchfahren der Materie die Kathodenstrahlen eine der einfallenden Menge proportionale sekundäre Strahlung auslösen, deren Energie dem durchfahrenen Atome entstammt; — eine Anschauung, die der Bestätigung allerdings bedarf. In diesem Falle mißt ein die durchgegangene Strahlung auffangender Faradayscher Käfig außer dieser die an der Hinterseite des Blättchens entstehende und mit der dort herrschenden Strahlungsintensität, also mit $J_0(1 - \alpha_B)e^{-\alpha d}$, proportionale Sekundärstrahlung mit; in der Formel für die Durchlässigkeit ist also für Ladung der durchgegangenen Strahlen zu setzen:

$$J_0(1 - \alpha_B)e^{-\alpha d}\{1 + \sigma\},$$

wo α_B der Reflexionskoeffizient für diesen Fall, nach Hrn.

Becker = 0,174, σ , der Koeffizient der sekundären Emission, gleich 0,134 zu setzen ist. Die Durchlässigkeit wird dann:

$$D = (1 - \alpha_B) e^{-\alpha d} \{1 + \sigma\}.$$

Rechnet man hieraus α aus, so findet man für 14000 Volt:

$$\alpha = 9810 \text{ für die Dicke } 0,00018 \text{ cm}$$

$$\alpha = 8900 \text{ " " " } 0,00036 \text{ "}$$

Für 16500 Volt:

$$\alpha = 5790 \text{ für die Dicke } 0,00018 \text{ cm}$$

$$\alpha = 5082 \text{ " " " } 0,00036 \text{ "}$$

Auffällig und mir nicht recht erklärlich ist es, daß meine Absorptionskoeffizienten bei 16500 Volt von dem durch Hrn. Becker gefundenen Wert nicht sehr verschieden sind, da doch Hr. Becker ein bedeutend höheres Entladungspotential, etwa 35000 Volt, benutzt hat, und der Wert des Absorptionskoeffizienten mit steigendem Potential stets abnimmt.

Charlottenburg, den 1. Oktober 1905.

(Eingegangen 11. Oktober 1905.)

